Exercices de-ci, de-là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par Mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

Jean Fromentin,
17 rue de la Roussille,
79000 NIORT

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial, une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 498-1 (Un problème de lieu) *Olympiades soviétiques 1966*

On considère un triangle ABC d'un plan $\mathcal{P}$, un point M de l'espace n'appartenant pas à $\mathcal{P}$ et son projeté orthogonal H sur $\mathcal{P}$.
Le point M est tel que MH est la plus petite des quatre hauteurs du tétraèdre ABCM.
Déterminer le lieu de H.

Exercice 498-2 (Daniel Reisz – Auxerre)

On joue 20 fois à pile ou face et on obtient :

00 11 0000 1 0 11 00000 1 00

On regroupe les blocs formés par le même chiffre (comme suggéré typographiquement). Ici il y en a 9. De tels blocs s'appellent des runs en anglais.
Un élève est censé avoir joué 50 fois à pile ou face et prétend avoir obtenu le résultat suivant :

10101101001011000101001010110001010100110010101 00

soit 36 runs.
La probabilité d'un nombre si élevé de runs est très faible et fait douter de la réalité des lancers.
Écrire un algorithme qui simule 100 lancers de 50 « pile ou face » , qui compte le nombre de runs et imprime leur nombre moyen.

Exercice 498-3 (Galet rond ?)

La figure 1 ci-contre est issue de l'article « L'art d'arrondir les angles » de Julien Moreau (voir à la rubrique *Dans nos classes* du présent bulletin).

Prouver que les points P, Q, R, S, T et U sont cocycliques et préciser le centre du cercle.

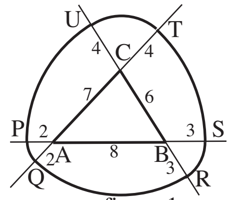


figure 1

Exercice 498-4 (Pour nos élèves) *exercices tirés de La feuille à problèmes de l'IREM de Lyon*

– f est une fonction affine. On sait que $1{,}2 < f(1) < 1{,}4$ et $3{,}3 < f(2) < 3{,}6$. Que peut-on dire de $f(10)$? *En 2012, on peut utiliser Geogebra pour émettre une conjecture*.

– Trouver un polynôme à coefficients entiers admettant $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ comme racine.

– La suite

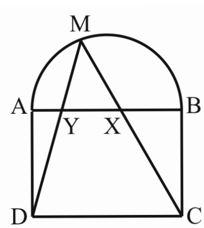
$$u_1 = \frac{1}{2}\ ;\ u_2 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}\ ;\ u_3 = \frac{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}}{\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{8}}}\ ;\ u_4 = \frac{\frac{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}}{\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{8}}}}{\frac{\frac{\frac{9}{10}}{\frac{11}{12}}}{\frac{\frac{13}{14}}{\frac{15}{16}}}}\ ;\ \ldots$$

a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ? Si non, pourquoi ?

Solutions

Exercice 496-1 (Pierre de Fermat – Beaumont de Lomagne)

Sur la figure ci-contre, le rectangle ABCD est tel que $AB = \sqrt{2}AD$.
À partir d'un point M du demi-cercle de diamètre [AB] extérieur au rectangle, on construit les segments [MC] et [MD]. Les points X et Y sont leurs intersections respectives avec le côté [AB].
Prouver que $AX^2 + YB^2 = AB^2$.



Solution de Jacques Borowczyk (Tours)

On rapporte le plan géométrique au repère orthonormé direct ayant pour origine le milieu du segment [AB] pour lequel on a $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$ et $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$. Les coordonnées $(x\,;y)$ du point M vérifient $y \geq 0$.
Le projeté orthogonal H de M sur [AB] a pour coordonnées $(x\,;0)$.

On a $AH = \frac{\sqrt{2}}{2} + x$ et $AH = \frac{\sqrt{2}}{2} + x$; et par suite du théorème de Thalès il vient :

$$AY = \left(\frac{1}{1+y}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + x\right) \text{ et } XB = \left(\frac{1}{1+y}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right).$$

Ainsi, $AX = \sqrt{2} - \left(\frac{1}{1+y}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right)$ et $YB = \sqrt{2} - \left(\frac{1}{1+y}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + x\right)$; soit encore,

$$AX = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(2 - \frac{1}{1+y}\right) + \frac{1}{1+y}x \text{ et } YB = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(2 - \frac{1}{1+y}\right) - \frac{1}{1+y}x.$$

Alors

$$AX^2 + YB^2 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(2 - \frac{1}{1+y}\right)\right)^2 + 2\left(\frac{1}{1+y}x\right)^2$$

$$\left(\textit{car les doubles produits des développements se sont éliminés}\right)$$

$$= \left(2 - \frac{1}{1+y}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+y}\right)^2\left(1 - 2y^2\right) \quad \left(car\ x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\right).$$

Il vient finalement $AX^2 + YB^2 = 2$; ce qui prouve bien que $AX^2 + YB^2 = AB^2$.

Autres solutions : Jean Gounon (Chardonnay), Raymond Heitz (Piriac), Bernard Collignon (Coursan), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Pierre Lapôtre (Calais) Jean-Claude Carréga (Lyon).

Remarque. Jacques Borowczyk et Bernard Collignon se sont intéressés au cas où M est situé sur le cercle de diamètre [AB] mais du côté du rectangle. L'égalité est toujours vérifiée, par contre les points X et Y seront situés (tous les deux ou un seul des deux, cela dépend de l'angle) en dehors du segment [AD].

Nota. L'idée d'une application du théorème de Pythagore pour la démonstration, vient naturellement à l'esprit mais ne semble pourtant pas aboutir … ? La question de l'origine de ce résultat reste énigmatique et entêtante. Ainsi, commentant sa solution, Jacques Borowczyk dit n'être pas parvenu, à l'instar de Georges Bouligand(1), à comprendre la raison profonde du résultat.

(1) Georges Bouligand (1889 - 1979), mathématicien français. On lui attribue la citation suivante au sujet des démonstrations : « *Bien des théorèmes sont susceptibles de différentes démonstrations. Les plus éducatives sont naturellement celles qui font comprendre les raisons profondes des résultats qu'on se propose d'établir. En pareille matière la notion de domaine de causalité fournit un guide.* »

Exercice 496-2 (Daniel Reisz – Auxerre) *d'après un exercice proposé par Michel DEMAZURE, dans son Cours d'Algèbre, éditions Cassini*

Une publication médicale annonce un traitement nouveau d'une maladie rare, efficace dans 29,41 % des cas. On sait que les malades qui ont fait l'objet de cet essai clinique étaient moins nombreux que 100.
Donner un nombre possible (*on peut aussi proposer un algorithme renvoyant toutes les réponses possibles inférieures à* 100).

Solution de Bernard Collignon (Coursan)

La valeur 29,41 % est sans doute une valeur approchée à 0,01 % près ; on cherche toutes les fractions dont le dénominateur est plus petit que 100 et qui sont égales à 0,2941 à 0,0001 près.
Ces fractions sont en nombre fini sachant que le numérateur B et le dénominateur A vérifient : $1 \leq A \leq 99$ et $1 \leq B \leq A$. Il y en a donc :

$$99 + 98 + \ldots + 2 + 1 = \frac{99 \times 98}{2} = 4\,851.$$

On peut faire une recherche systématique en se servant de la calculatrice TI -83 Plus par exemple avec le programme ESSAI suivant :

```
PROGRAM :ESSAI
: 0 → C
: For (A,1,99)
: For (B,1,A)
: If abs( B/A–0.2941)<0.0001
: Then
: Disp “A =”,A
: Disp “B =”,B
: C + 1 → C
: Pause
: End
: End
: End
: Disp “NB SOLUTIONS=”,C
: End
```

Le programme donne alors comme solutions les cinq couples (A ; B) suivants :
(17 ; 5), (34 ; 10), (51 ; 15), (68 ; 20) et (85 ; 25).

Le nombre de malades qui ont fait l’objet de cet essai peut donc prendre cinq valeurs : 17, 34, 51, 68 ou 85.

Autres solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d’Orques), Pierre Lapôtre (Calais) Jean-Claude Carréga (Lyon).

Exercice 496-3 (Louis-Marie Bonneval – Poitiers)

Cette photo représente un escalier en colimaçon vu d'en bas.
On a l'impression de voir une spirale. Est-ce le cas ?

Solution de Pierre Renfer (Saint Georges d’Orques)

L’escalier est une hélice tracée sur un cylindre droit à base circulaire.

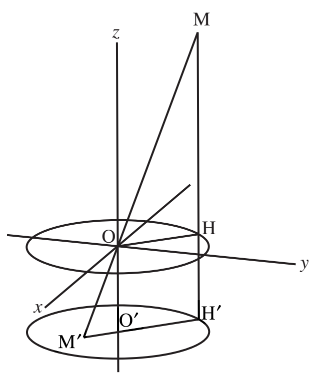
La photo de l'hélice est son image par une projection centrale f de l'espace projectif vers un plan projectif.
Les points d'intersection de l'hélice et d'une génératrice Δ du cylindre forment une échelle régulière.
Soient A, B, C trois points consécutifs de cette échelle.
Alors le point à l'infini ω de Δ est le conjugué harmonique de B par rapport à (A, C).
Soient U, V, W, O les projetés respectifs de A, B, C, ω par f sur la droite Δ', image de Δ.
Comme f est une application homographique et qu'elle conserve les divisions harmoniques, O est le conjugué de V par rapport à (U, W),
Si l'image de l'hélice était une spirale d'Archimède les distances OU, OV, OW formeraient une suite arithmétique et c'est le point à l'infini α de Δ' qui serait le conjugué de V par rapport à (U, W).
Si l'image de l'hélice était une spirale logarithmique les distances OU, OV, OW formeraient une suite géométrique et c'est le symétrique V′ de V par rapport à O qui serait le conjugué de V par rapport à (U, W), car l'inversion de pôle O laissant fixes V et V′ échangerait U et W.

L'image de l'hélice n'est donc ni une spirale d'Archimède ni une spirale logarithmique.

Solution de Louis-Marie Bonneval (Poitiers)

Il s'agit du bord intérieur de l'escalier, que nous modéliserons par une hélice circulaire.

Prenons un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ dont l'origine est l'objectif de l'appareil photo, les deux premiers axes étant horizontaux, et le troisième axe (vertical) celui de l'hélice.
Dans ce repère, l'hélice admet un paramétrage de la forme $x = \mathrm{R}\cos(t)$, $y = \mathrm{R}\sin(t)$, $z = mt$.
t est l'angle polaire de H, projeté orthogonal de M sur le plan $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.



Le capteur de l'appareil, où se forme l'image, est dans un plan horizontal P, d'équation $z = h$.
De tout point M(x, y, z) de l'escalier part vers l'objectif O un rayon lumineux qui coupe P en M′(x', y', z'), image de M.
Alors $x' = kx$, $y' = ky$, $z' = h$.
On en déduit $k = h/z$, et par suite : $x' = hx/z$, $y' = hy/z$, $z' = h$.
C'est la traduction analytique de la projection centrale (autrement dit la perspective) de centre O sur le plan P.
Donc l'image de l'hélice a pour représentation paramétrique :

$$x' = \frac{h\mathrm{R}\cos(t)}{mt},\ y' = \frac{h\mathrm{R}\sin(t)}{mt},\ z' = h.$$

Or dans le plan P muni du repère $\left(O',\vec{i},\vec{j}\right)$ l'angle polaire θ de M′ est égal à $t+\pi$ (cf. figure).

Donc l'équation polaire de la courbe image est $r=\dfrac{a}{\theta-\pi}$, où $a=\dfrac{hR}{m}$: on reconnaît une spirale hyperbolique.

Remarques :
1) R est positif, h est négatif ; m est positif ou négatif selon le sens d'enroulement de l'hélice. Donc a peut être positif ou négatif, et cela indique le sens d'enroulement de la spirale sur l'image.
2) Si le point de vue n'est pas sur l'axe (par exemple s'il est sur l'escalier lui-même, dans le cas d'une vue d'en haut), on peut adapter le raisonnement, et la courbe obtenue n'est plus une spirale.

Autres solutions : … pas d'autre solution. En quelque sorte : y'a pas d'(autre) hélice hélas, c'est là qu'est l'os ![(2)]

Nota. Louis-Marie Bonneval précise qu'il y a d'autres familles de spirales : de Galilée, de Fermat, parabolique, de Poinsot, de Nielsen, de Cotes, lituus, spiral … et renvoie par exemple le lecteur intéressé au nº spécial 45 de la revue du Palais de la Découverte intitulé *Courbes mathématiques* que l'APMEP diffuse avec ce même titre mais sous le nº 202.

Exercice 496-4 (Frédéric de Ligt – Montguyon)

Un quadrilatère convexe, dont les côtés et les diagonales sont rationnels, est divisé par ses diagonales en quatre triangles.
Prouver que les côtés de chacun de ceux-ci sont rationnels.

Solution de Raymond Heitz (Piriac)

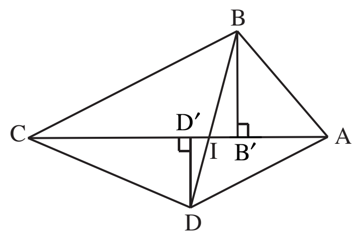
On peut d'abord se convaincre que de tels quadrilatères existent, par exemple en exhibant un rectangle de format 3×4…

Cas général :

Calculons $\cos\left(\widehat{ACB}\right)$:

On a $AB^2=AC^2+BC^2-2\cdot AC\cdot BC\,\cos\left(\widehat{ACB}\right)$.

Comme toutes les longueurs qui interviennent sont rationnelles, il en est ainsi de $\cos\left(\widehat{ACB}\right)$.



De même pour $\cos\left(\widehat{CBD}\right)$.

La démonstration se fera en trois étapes.

(2) pour reprendre un échange entre Bourvil et De Funès à la fin de *La grande vadrouille*.

1. On remarque d'abord que $\cos\left(\widehat{BIC}\right)$ est également rationnel.

   En effet, d'une part $CB' = CB \times \cos\left(\widehat{ACB}\right)$ est rationnel et de façon analogue AD′, donc B′D′ (= AC − CB′ − AD′) l'est aussi ; d'autre part en considérant les triangles semblables IBB′ et IDD′ on voit que
$$\frac{IB}{IB'} = \frac{ID}{ID'} = \frac{IB + ID}{IB' + ID'} = \frac{BD}{B'D'}$$
   est rationnel. Or
$$\cos\left(\widehat{BIC}\right) = \cos\left(\widehat{BIB'}\right) = \frac{IB'}{IB},$$
   donc $\cos\left(\widehat{BIC}\right)$ est rationnel.
2. Le triangle BIC a donc trois angles dont les cosinus sont rationnels. Donc les $\sin^2$ le sont également. Or on a :
$$\frac{BC^2}{\sin^2 \widehat{BIC}} = \frac{BI^2}{\sin^2 \widehat{BCI}} = \frac{CI^2}{\sin^2 \widehat{CBI}}.$$
Comme BC^2 et les dénominateurs sont rationnels, il en est de même de BI^2 et CI^2.
3. Posons $BI = x$, $DI = y$.
   On sait que : $x + y = BD$ est rationnel, x^2 (de même y^2) est rationnel.
   Àlors $(x + y)^2$ est rationnel, il s'ensuit que xy l'est aussi.

   Idem pour $\frac{x}{y} = \frac{x^2}{xy}$.

   En posant $\frac{x}{y} = r$ $(\in \mathbb{Q})$, on obtient $x + y = (r + 1)y$, donc y est rationnel et x aussi.

   Même démonstration pour les segments analogues.

   Remarque concernant la figure : il se pourrait que les diagonales soient perpendiculaires et que les point B′, I et D′ coïncident, mais cela ne ferait qu'alléger la démonstration.

Autres solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Bernard Collignon (Coursan).

Nota. Cet exercice nous invite à relire l'article de Pierre Legrand sur les questions de rationalité d'angles mesurés en degrés, paru dans le BV 491 (p. 729).