La méthode de Newton et son histoire

André Bonnet

Introduction

La méthode de Newton (1643-1727)[1] est connue depuis plus de 300 ans et elle est toujours d'actualité. Cet article n'est pas destiné à ajouter un papier de plus à l'éloge de la convergence « phénoménale » de cette méthode (l'expression est de Cédric Villani, Médaille Fields 2010, dans sa conférence pour les 30 ans du CIRM[2]), mais à donner un éclairage historique, en étudiant le texte de Newton, publié en anglais en 1736, intitulé « *The method of fluxions, and infinite series* », mais dont le manuscrit (en latin) est achevé depuis 1671.

La méthode de Newton apparait au tout début de l'ouvrage et ne fait pas appel à la notion de dérivée, ni à la notion de fluxion[3].

Après avoir rappelé la méthode telle qu'elle est enseignée de nos jours, nous examinerons des extraits du document cité, où Newton expose, sur un exemple (une équation du troisième degré), sa manière de résoudre de façon approchée les équations (algébriques), puis nous expliquerons pourquoi la convergence est « phénoménale ».

(*) andre.bonnet9@orange.fr

(1) On trouvera parfois 1642 comme année de naissance de Newton, il faut comprendre « du calendrier julien ». Le calendrier grégorien n'a été adopté que tardivement par les anglais (à partir de 1752).

(2) Centre International de Rencontre Mathématiques, 163 avenue de Luminy, 13288 Marseille.

(3) Les mots fluentes et fluxions viennent du latin *fluere* qui signifie couler ; l'idée de Newton est que *les grandeurs varient au fur et à mesure que le temps s'écoule et que les fluxions sont les vitesses de ces écoulements*. Dans l'édition de 1736, les grandeurs sont notées x, y, z et sont appelées les fluentes, les fluxions sont notées $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ (ce sont les vitesses avec lesquelles les fluentes varient dans le temps). Les fluxions peuvent être considérées comme des dérivées par rapport au temps (au sens où nous l'entendons aujourd'hui).
C'est Leibniz qui donnera, dans un article assez court, paru dans la revue scientifique *Acta Eruditorum* (publiée à Leipzig en 1682), les règles du calcul différentiel. Sa conception est assez différente. Selon lui, les grandeurs sont constituées d'infiniment petits (comme la droite est formée de points). Il invente la notation dx, dy, dz et s'autorise l'écriture du rapport d'infiniment petits $\frac{dy}{dx}$ (notre dérivée). Il invente aussi le symbole de sommation ayant la forme d'un « S » étiré, et il ose écrire $\int dy = y$ (qui ressemble beaucoup à notre intégrale).
Avec cette notation, le lien avec les fluxions de Newton est le suivant : $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx}$.

La méthode de Newton dans les manuels actuels

Le principe de la méthode de Newton pour la résolution approchée d'une équation de la forme $f(x) = 0$ est actuellement enseigné comme une application de la dérivée, son principe peut être résumé ainsi.

Après avoir déterminé un intervalle où il n'y a qu'une seule racine α, on choisit une valeur u_0 assez proche de α et on construit, par récurrence, une suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où u_{n+1} est obtenu, à partir de u_n, comme l'abscisse du point d'intersection de l'axe horizontal et de la tangente en $\left(u_n, f\left(u_n\right)\right)$ à la courbe représentative de f.

Les quatre figures ci-dessous résument le principe de la méthode et donnent, en même temps, une idée de la rapidité de convergence, puisque, pour voir ce qu'il se passe autour de α sur la figure 3, et repérer les termes u_1, u_2, u_3 il a fallu zoomer (figure 4).

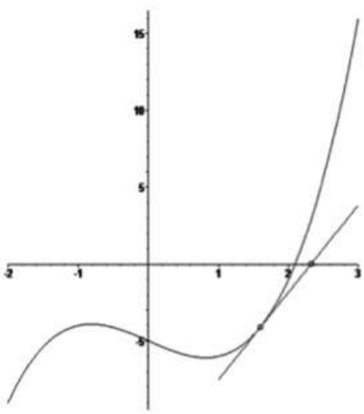

Figure 1

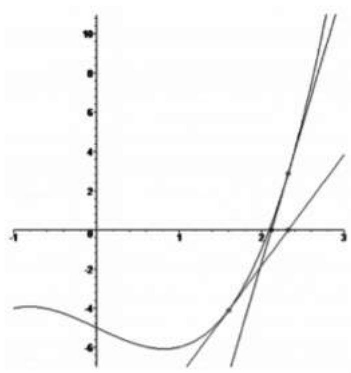

Figure 2

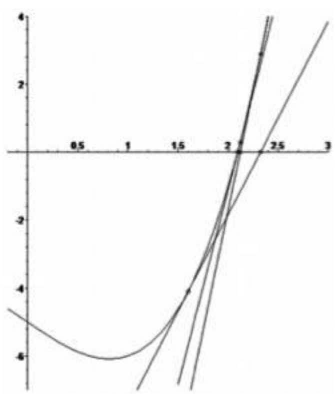

Figure 3

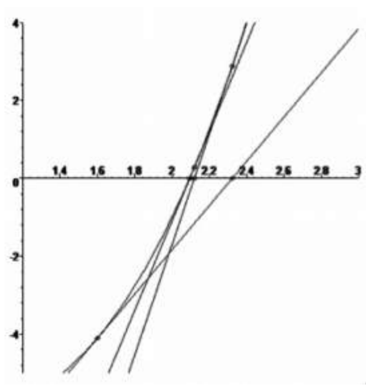

Figure 4

L'étude théorique

Équation de la tangente en $\left(u_n, f\left(u_n\right)\right)$ à la courbe représentative de f :

$$y = f'\left(u_n\right)\left(x - u_n\right) + f\left(u_n\right).$$

Détermination de u_{n+1} comme solution de l'équation :

$$f'\left(u_n\right)\left(x - u_n\right) + f\left(u_n\right) = 0.$$

Formule de récurrence pour la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f\left(u_n\right)}{f'\left(u_n\right)}$$

avec u_0 donné.

Si la fonction f est définie sur un intervalle I, en posant $\Phi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, la validité de la méthode est assurée si la dérivée f' ne s'annule pas sur I et si(4) $\Phi(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$.

Remarque

Dans l'exemple utilisé pour illustrer la méthode de Newton (fig. 1 à 4), la suite u_0, u_1, u_2, … n'est pas monotone, mais la monotonie apparait dès le rang 1 (la suite u_1, u_2, u_3, … est décroissante). Cette situation est généralisable, si on exige que l'intervalle I soit choisi de telle sorte que les dérivées f' et f'' soient de signe constant sur I.

L'algorithme

L'algorithme habituellement utilisé pour déterminer une valeur approchée de la solution α est le suivant (on ne donne ici que le squelette de l'algorithme) :

$u \leftarrow u_0$
tant que <?> faire :

$$u \leftarrow u - \frac{f(u)}{f'(u)}$$

afficher u

Le test d'arrêt n'est pas évident. La suite est généralement monotone, tout au moins à partir d'un certain rang, et de ce fait deux termes consécutifs de la suite ne constituent pas un encadrement de la valeur cherchée. Malgré cela on trouve en

(4) Cette condition, bien qu'indispensable pour assurer la bonne définition de la suite, est difficile à vérifier dans la pratique. L'étude, faite un peu plus loin sur la rapidité de convergence, montre que Φ est contractante autour de α (voir, page 10, la note n° 4), donc la valeur de u_{n+1} est comprise entre α et u_n, ce qui prouve, à la fois, l'existence et la monotonie de la suite.

général dans les manuels d'analyse numérique un test d'arrêt basé sur la condition $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$, ce qui conduit à modifier l'algorithme ainsi :

$$u \leftarrow u_0$$
$$v \leftarrow u_0 - \frac{f(u_0)}{f'(u_0)}$$
tant que $|v - u| > \varepsilon$ faire :
$$u \leftarrow v$$
$$v \leftarrow u - \frac{f(u)}{f'(u)}$$
afficher v

Sans avoir étudié la convergence de la méthode, il n'est pas évident de comprendre pourquoi la condition $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$ (qui est obtenue en sortie de boucle), permet d'avoir l'assurance que la condition $|u_{n+1} - \alpha| \leq \varepsilon$ est remplie, ce qui est, véritablement, l'objectif visé.

Personnellement, pour calculer une valeur approchée à 10^{-8} près, j'utilise l'algorithme :

$$\varepsilon \leftarrow 10^{-8}$$
$$u \leftarrow u_0$$
tant que $f(u-\varepsilon) \times f(u+\varepsilon) > 0$ faire :
$$u \leftarrow u - \frac{f(u)}{f'(u)}$$
afficher u

La fonction f étant continue, la condition $f(u-\varepsilon) \times f(u+\varepsilon) \leq 0$ prouve (d'après le théorème des valeurs intermédiaires) que $\alpha \in [u-\varepsilon, u+\varepsilon]$ donc que $|u-\alpha| \leq \varepsilon$.

La méthode telle qu'elle est décrite par Newton

Comme il est dit dans l'introduction, le manuscrit en latin (la langue des savants à l'époque) a été achevé en 1671, mais Newton a différé sa parution, à cause des critiques qu'il subissait de toute part. Une première tentative de parution a eu lieu en 1704, année où Newton confie son manuscrit à Pemberton et lui donne son consentement pour une publication. On ne sait pas pourquoi cette démarche n'a pas abouti. Ce n'est qu'en 1736 que Colson, qui a étudié de près le travail de Newton et rédigé d'abondants commentaires, fait paraitre ***The method of fluxions, and infinite series***, alors que Newton est décédé le 31 mars 1727 à l'âge de 84 ans. L'ouvrage de 374 pages comporte une préface (24 pages), le texte de Newton (134 pages) et les commentaires de Colson (216 pages).

Cette publication en anglais, alors que le texte original est en latin, s'explique par le fait que Colson a dû d'abord traduire le manuscrit dans sa langue maternelle, tout en rédigeant d'abondants commentaires. Il a renoncé à traduire ceux-ci en latin car il lui était plus commode de publier l'ensemble en anglais.

Dès sa parution, à cause de son succès, Buffon se lancera dans une traduction en français qui paraîtra en 1740. Dans sa préface, Buffon rappelle les raisons, invoquées par Newton lui-même, de sa réticence à donner son manuscrit à un éditeur, ce qui a eu comme conséquence la publication posthume de son ouvrage. Le passage de cette préface où Newton donne cette explication est reproduit ci-dessous (en latin) :

Et suborta statim (per diversorum Epistolas objectionibus refertas) crebra interpellationes me prorsus à concilio deterruerunt & effecerunt ut me arguerem imprudentia quod umbram captando, eatenus perdideram quietem meam rem prorsus substantialem. Il semble

dont la traduction est la suivante:

« Des empêchements fréquents produits (par des lettres d'opposants pleines d'objections) me dissuadèrent absolument de toute publication, car je risquais alors de perdre ma tranquillité, chose absolument essentielle pour moi »

La méthode de Newton est exposée dans les pages 5-6 et 7 et les commentaires de Colson, sur ce paragraphe, sont en pages 185-186 et 187.

On a reproduit, ci-dessous, le passage de la page 6 concernant la résolution approchée d'une équation numérique(5) :

20. Let this Equation $y^3 - 2y - 5 = 0$ be proposed to be resolved, and let 2 be a Number (any how found) which differs from the true Root less than by a tenth part of itself. Then I make $2 + p = y$, and substitute $2 + p$ for y in the given Equation, by which is produced a new Equation $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, whose Root is to be sought for, that it may be added to the Quote. Thus rejecting $p^3 + 6p^2$ because of its smallness, the remaining Equation $10p - 1 = 0$, or $p = 0{,}1$, will approach very near to the truth. Therefore I write this in the Quote, and suppose $0{,}1 + q = p$, and substitute this fictitious Value of p as before, which produces $q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$. And since $11{,}23q + 0{,}061 = 0$ is near the truth, or $q = -0{,}0054$ nearly, (that is, dividing 0,061 by 11,23, till so many Figures arise as there are places between the first Figures of this, and of the principal Quote exclusively, as here there are two places between 2 and 0,005) I write $-0{,}0054$ in the lower part of the Quote, as being negative; and supposing $-0{,}0054 + r = q$, I substitute this as before. And thus I continue the Operation as far as I please, in the manner of the following Diagram :

(5) Les extraits du texte de Newton (pages 5, 6 et 7) et les commentaires de Colson (pages 185, 186 et 187) sont disponibles sur le site de la régionale APMEP d'Aix-Marseille.

On peut noter que l'équation étudiée par Newton, pour exposer sa méthode de résolution, est la suivante :

$$y^3 - 2y - 5 = 0 \qquad (1)$$

Dans la version anglaise, on pouvait avoir des doutes sur le degré de l'équation (car l'exposant est illisible), par contre le degré apparait clairement dans la traduction par M. le marquis de Buffon, intendant des jardins du Roy :

> XX. Soit l'Equation $y^3 - 2y - 5 = 0$ à reduire en ſuite infinie, prenez un Nombre comme 2, qui ne differe pas d'une de ſes dixiemes Parties de la vraie valeur de la Racine, & faites $2 + p = y$, ſubſtituez $2 + p$ pour y dans l'Equation donnée, & vous aurez $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, dont il faut chercher la Racine pour l'ajoûter au Quotient; rejettez $p^3 + 6p^2$ à cauſe de ſa petiteſſe, il reſtera $10p - 1 = 0$, ou $p = 0{,}1$, ce qui eſt très-près de la vraie valeur de p; c'eſt pourquoi l'écrivant au Quotient, je fais $0{,}1 + q = p$, & ſubſtituant comme auparavant, j'ai $q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$, négligeant les deux premiers Termes, il reſte $11{,}23q + 0{,}061 = 0$, ou $q = -0{,}0054$ à peu près (& cela en diviſant 0,061 par 11,23 juſqu'à ce qu'on ait autant de Figures qu'il y a de places entre les premieres Figures de ce Quotient & le principal Quotient excluſivement, comme ici où il a deux places entre 2 & 0,005) J'écris donc $-0{,}0054$ dans le Quotient, mais au-deſſous parce que ce Terme eſt Négatif; & ſuppoſant $-0{,}0054 + r = q$, je ſubſtitue comme auparavant, & je continue ainſi l'Opération auſſi long-tems qu'il convient, comme on le peut voir ci-deſſous.

Il faut signaler que les figures 1, 2, 3 et 4 ont été réalisées avec la fonction $f(t) = t^3 - 2t - 5$. Par contre, la valeur initiale u_0 n'a pas été prise égale à 2, comme chez Newton. Le dessin a été réalisé avec $u_0 = 1{,}6$ pour des raisons de lisibilité.

Il est très facile de se convaincre de l'efficacité de la méthode employée par Newton pour résoudre cette équation, en prenant conscience que le résultat donné au bas de la page 7 :

> the Quote to the Period required. Then ſubtracting the negative part of the Quote from the affirmative part, there ariſes 2,09455148 for the Root of the propoſed Equation.

est bien la valeur approchée par défaut, à 10^{-8} près, de l'unique racine de l'équation (1).

On peut, par exemple, le vérifier en calculant $f(2.09455148)$ et $f(2.09455149)$ avec l'instrument de son choix et en constatant qu'ils sont de signes contraires.

Ce qui est remarquable, c'est que ce résultat est obtenu par une demi-page, seulement, de calculs (à la main). Cet exemple met en évidence la rapidité « phénoménale » de convergence de la méthode.

Pour comprendre la démarche de Newton suivons le texte pas à pas:

… prenez un Nombre 2, qui ne diffère pas d'une de ses dixièmes Parties de la vraie valeur de la Racine…

Sans doute, Newton calcule $f(2) = -1$ et $f(2{,}1) = 0{,}061$ pour obtenir cet encadrement de la racine.

… & faites $2 + p = y$, substituez $2 + p$ pour y dans l'Equation donnée, & vous aurez …

Évidemment, la détermination de p est un problème aussi difficile à résoudre que la recherche de la valeur exacte de α (solution de l'équation), puisque, en reportant $2 + p = y$ dans l'équation (1) on est conduit à résoudre l'équation :

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0 \tag{2}$$

… rejetez $p^3 + 6p^2$ à cause de sa petitesse …

c'est-à-dire en supprimant dans (2) les termes contenant p^2 et p^3 et en résolvant l'équation $10p - 1 = 0$ (qui résulte de cette linéarisation du problème), Newton obtient $p = 0{,}1$.

La valeur $2 + p = 2{,}1$ est alors une valeur approchée par excès, qui comme le dit Newton « *est très près de la vraie valeur* ».

Newton pose alors $0{,}1 + q = p$ et substitue cette valeur dans l'équation (2), et obtient l'équation

$$q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0 \tag{3}$$

puis en négligeant les termes contenant q^2 et q^3, il obtient une équation du premier degré en q :

$$11{,}23q + 0{,}061 = 0 \tag{4}$$

dont la solution exacte est $q = -\dfrac{0{,}061}{11{,}23}$ et dont il prend une valeur approchée $\tilde{q} = -0{,}0054$ alors que ce quotient vaut : $-0{,}0054318789…$

Enfin en posant :

$$-0{,}0054 + r = q \tag{5}$$

et par un report dans (3) puis par linéarisation de l'équation du troisième degré, Newton obtient la valeur de r.

Il donne à la fin le résultat : $y = 2 + p + q + r = 2{,}09455148$ qu'il ne faut pas prendre comme la valeur exacte de α mais comme une valeur approchée (sous-entendu à 10^{-8} près) sans que ce point soit justifié.

Par contre les calculs (à la main) pour obtenir ce résultat sont relativement brefs et on ne peut qu'admirer la disposition des calculs faits par Newton.

$y^3 - 2y - 5 = 0$	$+2,10000000$ $-0,00544852$ $+2,09455148$, &c. $= y$
$2 + p = y$. $\quad +y^3$ $-2y$ -5	$+8 + 12p + 6p^2 + p^3$ $-4 - 2p$ -5
The Sum	$-1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0,1 + q = p$. $\quad +p^3$ $+6p^2$ $+10p$ -1	$+0,001 + 0,03q + 0,3q^2 + q^3$ $+0,06 + 1,2 \quad +6,$ $+1, \quad +10,$ $-1,$
The Sum	$0,061 + 11,23q + 6,3q^2 + q^3$
$-0,0054 + r = q$. $\quad q^3$ $+ 6,3q^2$ $+ 11,23q$ $+ 0,061$	$-0,000000157464 + 0,00008748r - 0,0162r^2 + r^3$ $+0,000183708 \quad - 0,06804 \quad +6,3$ $-0,060642 \quad + 11,23$ $+0,061$
The Sum	$+0,0005416 \quad + 11,162r$
$-0,00004852 + s = r$.	

Toutefois, les ratures que l’on trouve à la fin de la détermination de r font planer un doute sur la validité du résultat.

Un examen approfondi du document ci-dessus montre que le cartouche qui correspond à la détermination de r est à revoir ; ceci est très facile avec nos moyens de calculs actuels.

Il semble que Newton, dans un souci de simplification des calculs, ait retenu, dans un premier temps, comme valeur approchée de q la valeur –0.0054 alors que sa valeur exacte est $-\dfrac{0{,}061}{11{,}23}$ et qu’une valeur approchée à 10^{-9} près est : –0,005431879.

Si on prend $q = -0.0054183$, l’avant-dernière ligne (correspondant à la détermination de r) peut être remplacée par :

$$+0{,}00018572 + 11{,}1616468\, r,$$

ce qui donne : $r = -\dfrac{0{,}000186602}{11{,}161648} \simeq -0{,}000016718$, puis :

$$y = 2 + 0{,}1 - 0{,}00543188 - 0{,}00001664 = 2{,}09455148.$$

On peut reconstituer le dernier cartouche (celui qui permet la détermination de r) , en prenant comme valeur approchée de q la valeur –0,0054183.

$-0{,}0054183 + r = q. \quad q^3$	$-0{,}000000162 + 0{,}00088513\, r - 0{,}0162954\, r^2 + r^3$
$+\ 6{,}3\ q^2$	$+0{,}00018588 \ - \ 0{,}06844068\, r + 6{,}23 \quad r^2$
$+\ 11{,}23\, q$	$-0{,}06099911 \ + 11{,}23 \quad r$
$+\ 0{,}061$	$+0{,}061$
The Sum	$+0{,}000186603 \ + 11{,}161648 \quad r$
$-0{,}00001672 + s = r$	

Newton avait prévu avec l'égalité –0,00001672 + $s = r$ une nouvelle étape avec la détermination de s, mais ce dernier calcul s'est avéré inutile.

Étude de la rapidité de convergence

Dans la recherche d'une valeur approchée d'une solution d'une équation, la méthode de Newton intervient après la « séparation des racines » et après une étude destinée à localiser la valeur cherchée dans un intervalle $\mathrm{I} =]a,b[$, suffisamment petit pour que la fonction f soit dérivable et que la dérivée f' ne s'annule pas sur I.

Si on pose $\Phi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, on voit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est obtenue par : $u_{n+1} = \Phi(u_n)$ et que la racine α vérifie $\Phi(\alpha) = \alpha$. Donc α est « un point fixe » de Φ ; ceci sous réserve que l'on ait : $\Phi(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$, pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bien définie.

Cette dernière condition est en général satisfaite et, si elle ne l'est pas, on l'obtient la plupart du temps en restreignant l'intervalle I.

Sous réserve que la fonction f soit deux fois dérivable sur I, la fonction Φ est dérivable, et sa dérivée est :

$$\Phi'(x) = 1 + \frac{f(x)f''(x) - \left(f'(x)\right)^2}{\left(f'(x)\right)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}.$$

Ce calcul montre que $\Phi'(\alpha) = 0$, ce qui explique l'extraordinaire performance de la méthode de Newton.

Nous supposerons dans la suite que f'' est continue sur I.

La continuité de f, f' et f'' justifie l'existence de M, K et μ définis par :

$$\mathrm{M} = \max_{x\in\mathrm{I}} \left|f''(x)\right|,$$

$$\mu = \min_{x\in\mathrm{I}} \left(f'(x)\right)^2,$$

$$\mathrm{K} = \max_{x\in\mathrm{I}} \left|f(x)\right|.$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à f, on a :

$$\left|f(x) - f(\alpha)\right| \leq \mathrm{K}\left|x - \alpha\right|,$$

et comme $f(\alpha) = 0$ on obtient :

$$\left|f(x)\right| \leq \mathrm{K}\left|x - \alpha\right|.$$

En appliquant le théorème des accroissements finis à Φ on obtient :

$$\left|u_{n+1} - \alpha\right| = \left|\Phi(u_n) - \Phi(\alpha)\right| = \left|\Phi'(c)\right|\left|u_n - \alpha\right|$$

où c est situé entre u_n et α. Or :

$$\left|\Phi'(c)\right| = \left|\frac{f(c)f''(c)}{\left(f'(c)\right)^2}\right| \le \left|f(c)\right|\frac{\mathrm{M}}{\mu} \le \mathrm{K}\left|c-\alpha\right|\frac{\mathrm{M}}{\mu} \le \frac{\mathrm{KM}}{\mu}\left|u_n-\alpha\right|,$$

d'où :

$$\left|u_{n+1}-\alpha\right| \le \frac{\mathrm{KM}}{\mu}\left|u_n-\alpha\right|^2.$$

On en déduit aussi[(6)] que :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \left|\Phi(x)-\Phi(\alpha)\right| \le k\left|x-\alpha\right|,$$

avec $k = \dfrac{\mathrm{KM}}{\mu}$.

Dans l'exemple utilisé par Newton : $f(x) = x^3 - 2x - 5$, $f'(x) = 3x^2 - 2$ et $f''(x) = 6x$ et on peut prendre $a = 2$ et $b = 2{,}1$.

Une étude rapide des variations de f' et de f montre que f' et f sont croissantes (sur I) et qu'il est possible de prendre :

$$\mathrm{K} = 0{,}061 \quad ; \quad \mathrm{M} = 12{,}6 \quad ; \quad \mu = 10,$$

ce qui donne l'estimation de l'erreur suivante :

$$\left|u_{n+1}-\alpha\right| \le 0.077\left|u_n-\alpha\right|^2.$$

Pour $u_1 = 2.1$, donc $\left|u_1-\alpha\right| < 0.1$, les erreurs dues à la méthode sont estimées à :

$$\left|u_2-\alpha\right| < 0.077 \times (0.1)^2 = 0.00077,$$

$$\left|u_3-\alpha\right| < 0.077 \times \left(0.077 \times (0.1)^2\right)^2 = 4.77\ 10^{-8}.$$

Ce résultat justifie que la valeur trouvée par Newton (2,09455148) est une valeur approchée à moins de 4,7 10^{-8} près.

La contribution de Raphson

Après la lecture du texte de 1736, on peut se demander, à juste titre, si l'attribution à Newton seul de la méthode que nous utilisons actuellement est bien justifiée. On a pu observer, en effet, que Newton ne fait pas usage de la dérivée, notion qui est indispensable dans les algorithmes modernes.

Mais il faut noter, aussi, que Newton décrit sa méthode sur un exemple d'équation polynomiale et que dans les pages suivantes il se limitera à ce type d'équations avec

(6) Ce calcul montre que f est lipschitzienne et qu'elle est en général contractante, puisque K est proche de zéro si l'intervalle I qui contient α est assez petit.

une exception, l'équation de Kepler(7) : $x - e\sin(x) = \mathrm{M}$.

Si, dans le cas des équations polynomiales, il peut (par une utilisation itérée de la formule du binôme), obtenir la linéarisation du problème en négligeant dans les calculs les termes de degrés supérieurs à un, c'est impossible pour l'équation de Kepler(8).

Toutefois, il faut reconnaître que Newton met en évidence, dans les équations polynomiales, « l'application linéaire tangente » qui est une notion relativement très proche de la dérivée.

Raphson (1648-1712 ?) présentera en 1690, dans *Analysis aequationum universalis* une nouvelle méthode de résolution des équations du troisième degré de la forme : $x^3 - bx = c$, qu'il appliquera à l'équation traitée par Newton :

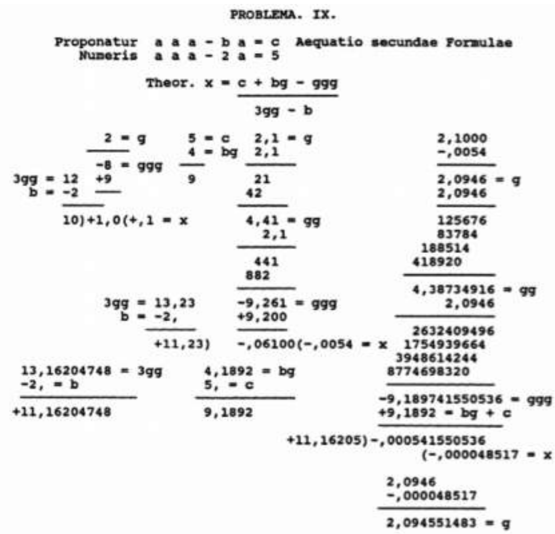

FIG. 9. *Raphson's method for solving* $x^3 - 2x - 5 = 0$.

(7) C'est l'équation qu'il faut résoudre pour trouver la position d'une planète qui décrit une orbite elliptique (autour du soleil et avec le soleil comme l'un de ses foyers) d'excentricité e et où $\mathrm{M} = 2\pi\dfrac{t}{\mathrm{T}}$ (T période orbitale de la planète, t le temps, x angle du rayon vecteur de la planète avec le grand axe de l'ellipse) où M et x sont exprimés en radians.

(8) Dans un autre ouvrage intitulé « Philosophiae Naturalis Principia Mathématica » (première publication à Londres en 1687), Newton donne, par une méthode purement géométrique, le calcul d'une valeur approchée de cette équation. À partir d'une valeur x_0, proche de la solution exacte, il obtient une nouvelle valeur x_1, sous la forme $x_1 = x_0 + c_0$, avec $c_0 = \dfrac{\mathrm{AM} - x_0 + e\sin(x_0)}{1 - e\cos(x_0)}$. En notant $f(x) = x - e\sin(x) - \mathrm{M}$, on reconnait, pour c_0, l'expression $-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

On peut constater que Raphson utilise la formule d'itération $x = \dfrac{5+2g-g^3}{3g^2-2}$ pour obtenir le complément x qu'il faut ajouter à g pour obtenir une meilleure approximation de la racine de l'équation.

La valeur initiale de g étant 2, la première valeur trouvée pour x est 0,1, puis on trouve successivement :

$$\begin{array}{ll} g = 2{,}1 & x = -0{,}005431889 \\ g = 2{,}094568121 & x = -0{,}000166393 \\ g = 2{,}094551483 & \end{array}$$

Alors que Newton résout, à chaque étape, un nouveau problème linéaire, Raphson garde la même formule pour déterminer x à partir de la nouvelle valeur de g.

Ces deux méthodes ont longtemps été regardées comme distinctes. C'est Lagrange (1736-1813) qui en 1798 observera que « *ces deux méthodes ne sont au fond que les mêmes présentées différemment* » et d'ajouter que la technique de Raphson « *est plus simple que celle de Newton* », car « *on peut se dispenser de faire continuellement de nouvelles transformées* «.

La contribution de Simpson

Dans son « Essays on Several Curious and Useful Subjects in Speculative and Mix'd Mathematicks, Illustred by a Variety of Examples » publié à Londres en 1740, Simpson (1710-1761) décrit « *A new Method for solution of equations in Numbers* » dans lequel il ne fait aucune référence à ses prédécesseurs, mais qui fait appel à la théorie des fluxions :

CASE I

When only one Equation is given, and one Quantity (x) to be determined.

"Take the fluxion of the given Equation (be it what it will) supposing x, the unknown, to be the variable Quantity; and having divided the whole by $\dot{x}$, let the Quotient be represented by A. Estimate the value of x pretty near the Truth, substituting the same in the Equation, as also in the Value of A, and let the Error, or resulting Number in the former, be divided by this numerical Value of A, and the Quotient be subtracted from the said former Value of x; and from thence will arise a new Value of that Quantity much nearer to the Truth than the former, wherewith proceeding as before, another new Value may be had, and so another, *etc.* 'till we arrive to any Degree of Accuracy desired."

Il montre en outre, sur l'exemple suivant :

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x^2} + \sqrt{1-3x^2} - 2 = 0$$

que sa méthode s'applique aux équations non polynomiales et ensuite, que l'on peut traiter aussi un système de deux équations à deux inconnues :

$$y + \sqrt{y^2 - x^2} - 10 = 0,$$
$$x + \sqrt{y^2 + x} - 12 = 0.$$

Conclusion

La méthode de Newton est souvent présentée comme une application de la notion de dérivée alors que Newton n'a jamais eu à sa disposition (avant 1671) une notion claire du concept de dérivée, sa théorie des fluxions n'en étant qu'une ébauche. L'étude historique devrait nous conduire, logiquement, à appeler la méthode que nous utilisons actuellement « méthode de Newton-Raphson-Simpson ».

Références utiles

L'ouvrage de Newton et la traduction de Buffon sont téléchargeables sur Gallica, la bibliothèque numérique de la Bnf (http://www.bnf.fr)
– en anglais, *The method of fluxions, and infinite series* ;
– la traduction de Buffon, *La méthode des fluxions et des suites infinies*.

La conférence de Cédric Villiani a été enregistrée. Elle est disponible,
sur le site du CIRM :
http://www.cirm.univ-mrs.fr/divers/conferences/CVi/CVi.html
ou sur le site de l'Université de Provence :
http://sites.univ-provence.fr/webtv/?x=cirm_villani_081011

Sur le site de la APMEP régionale d'Aix-Marseille (*www.apmep-aix-mrs.org/*), une version électronique de cet article est disponible. On y trouvera
– les figures en couleurs,
– des annexes montrant que la méthode de Newton n'est pas une pièce de musée, mais un outil utilisé couramment en ingénierie mathématique et même en informatique dans certains processeurs,
– les extraits des textes de Newton, de Colson et de Buffon, utilisés dans cet article.