

# Mathématiques actuelles et enseignement des mathématiques : quelles synergies ?<sup>(\*)</sup>

Michèle Artigue<sup>(\*\*)</sup>

## 1. Introduction

Les journées de l'APMEP 2011, intitulées « Mathématiques en Marche », nous ont donné à voir les mathématiques comme une science vivante, dynamique, indispensable aux avancées technologiques, indispensables aussi pour répondre aux grands défis auxquels fait face l'humanité, et des mathématiques interagissant pour cela avec un nombre croissant de domaines. À un moment où l'on peut légitimement s'inquiéter pour l'avenir de l'enseignement des mathématiques, tant semblent s'accumuler les obstacles et les contraintes, se détériorer les conditions d'exercice du métier d'enseignant et celles de la formation des maîtres, initiale comme continue, on peut envier ce dynamisme des mathématiques et vouloir y puiser des sources d'inspiration, une stimulation. C'est ce qui m'a amenée à choisir ce thème des synergies possibles entre mathématiques et enseignement des mathématiques pour ma conférence à ces journées. Penser ces synergies ne peut se faire sans considérer le maillon clef qu'est la formation des enseignants, car il semble bien illusoire de vouloir les faire vivre dans la réalité des classes si elles sont inexistantes dans la formation initiale et continue de ces derniers. Ceci m'a conduite à accorder une place importante dans mon exposé au projet Felix Klein<sup>(1)</sup>, un projet lancé récemment par l'ICMI<sup>(2)</sup> (Commission internationale de l'enseignement mathématique) dans lequel je suis personnellement impliquée. Quittant le domaine de la formation des enseignants, je suis ensuite revenue à l'enseignement lui-même et j'ai interrogé dans cette perspective les évolutions curriculaires récentes, en me posant les questions suivantes : Ont-elles cherché à établir des ponts entre les mathématiques actuelles et l'enseignement ? Ont-elles réussi ? Quelles leçons pouvons-nous en tirer pour penser plus efficacement les synergies entre les mathématiques qui se font et les mathématiques qui s'enseignent, pour faire que l'image que se font nos élèves des mathématiques soit celle d'une science vivante mais aussi celle d'une science qui leur semble accessible ?

---

(\*) Texte issu de la conférence prononcée à Grenoble le 24 octobre 2011, lors des Journées nationales de l'APMEP.

(\*\*) Université Paris Diderot – Paris 7.

(2) Voir le site du projet <http://www.kleinproject.org>

(3) Voir le site <http://mathunion.org/icmi/>

## 2. La coupure entre mathématiques qui se font et mathématiques enseignées : une question récurrente

Quand on parle d'évolution des mathématiques, on met souvent en avant les caractéristiques suivantes :

- l'explosion dans la production de connaissances, et celle associée des publications ;
- les changements d'équilibre dans l'édifice global avec notamment la place prise par les probabilités, un domaine encore à la frontière des mathématiques au début du 20<sup>ème</sup> siècle et qui féconde aujourd'hui tous les domaines des mathématiques ;
- l'importance croissante des connexions, internes et externes, l'investissement de nouveaux champs et les nouvelles sources d'inspiration que les mathématiciens y trouvent ;
- le rôle clef que jouent les mathématiques dans les avancées technologiques ;
- le rôle qu'elles peuvent et doivent jouer pour éclairer les grands défis auxquels l'humanité fait face et aider à y faire face ; ainsi l'année 2013 sera-t-elle l'année des mathématiques de la planète Terre ;
- mais aussi l'évolution des pratiques mathématiques, la part croissante que prennent dans ces pratiques, grâce à l'évolution technologique, démarches expérimentales et simulations.

Et il est aussi fréquent d'entendre dire que, comparativement, l'enseignement ne donne aujourd'hui à voir et à pratiquer aux élèves que des mathématiques vieilles de plusieurs siècles, sinon de millénaires, bref une science morte et ce, avec des pratiques elles aussi inchangées. Les liens entre les mathématiques qui se font et les mathématiques qui s'enseignent seraient coupés, et ceci aurait des conséquences lourdes sur l'engagement des élèves, leur réussite, leurs choix d'orientation, ...

Quel est le degré de véracité d'une telle affirmation ? J'y reviendrai ultérieurement. Chacun a son mot à dire sur l'enseignement et ce n'est pas parce que des déclarations viennent de brillants esprits, voire de brillants mathématiciens, que nous ne devons pas les soumettre à l'étude et à la critique. Mais, je voudrais en fait tout d'abord rappeler qu'il s'agit là d'une affirmation qui n'est en rien nouvelle. Elle a fondé les discours soutenant la réforme des mathématiques modernes il y a une cinquantaine d'années mais bien avant, la trop grande distance avec la science qui se fait, c'était déjà ce que reprochait à l'enseignement le grand mathématicien Felix Klein au début du 20<sup>ème</sup> siècle. C'est ce qui le poussa à s'engager dans le mouvement de réforme en Allemagne connu sous le nom de réforme Meran, et à organiser, pour aider à réduire cette distance, une série de conférences pour les enseignants de gymnasium qui allait donner lieu au célèbre ouvrage *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, plus connu dans sa version anglaise *Elementary mathematics from an advanced standpoint* (Klein, 1924, 1932).

Comme il l'explique dans la préface du premier tome, Felix Klein entend en fait lutter contre ce qu'il perçoit comme une double discontinuité entre enseignement

secondaire et enseignement supérieur, entre la science enseignée et la science en marche. Il la décrit ainsi : une première rupture se produit lorsque les étudiants, sortant de l'enseignement secondaire, entrent en contact avec des mathématiques complètement nouvelles à l'université, une seconde lorsque, formés par l'université, ils sont censés mettre leurs connaissances universitaires au service de l'enseignement secondaire. Et pour lutter contre cette double discontinuité, il se propose de :

« mettre à la disposition de l'enseignant, mais aussi de l'étudiant avancé, selon les points de vue de la science moderne mais d'une manière aussi simple, stimulante et convaincante que possible, à la fois le contenu et les fondements des sujets enseignés, en prêtant l'attention requise aux méthodes actuelles d'enseignement » (p. III, notre traduction)

Il s'agit aussi, ce faisant, de promouvoir les réformes nécessaires. À cette époque, la place à accorder dans l'enseignement à la notion de fonction est un point important de débat et Felix Klein prend clairement parti :

« Nous, qui sommes appelés les réformateurs, voudrions mettre le concept de fonction au centre de l'enseignement parce que, de tous les concepts mathématiques des deux derniers siècles, c'est celui qui joue le rôle majeur partout où la pensée mathématique est utilisée. Nous voudrions l'introduire dans l'enseignement aussi tôt que possible, avec un usage constant de la méthode graphique, la représentation des relations fonctionnelles dans le système de coordonnées  $x, y$ , qui est utilisée aujourd'hui dans toutes les applications pratiques des mathématiques (ibidem, p. IV, notre traduction)

Il reconnaît certes la nécessité d'un certain décalage entre les avancées les plus récentes de la science et l'enseignement mais trouve la situation de l'époque en ce qui concerne les fonctions tout à fait inacceptable car pour l'essentiel, l'enseignement ignore selon lui tous les développements intervenus depuis l'époque d'Euler, et il ajoute :

« Nous désirons simplement que la notion générale de fonction, selon l'une ou l'autre des interprétations d'Euler imprègne comme un ferment l'enseignement entier des mathématiques au lycée. Elle ne doit pas, bien sûr être introduite au moyen de définitions abstraites mais transmise aux élèves comme une possession vivante, au moyen d'exemples élémentaires, comme l'on en trouve de multiples exemples chez Euler » (ibidem, p. 205)

Comme on le voit, le discours mêle considérations mathématiques et didactiques. Sur le plan didactique, il est porté par une vision « génétique » de l'apprentissage dont on connaît aujourd'hui les limites mais qui est très partagée à l'époque (Schubring, 2011). Selon cette vision, l'enseignement, pour être efficace, ne doit pas présenter la science aboutie mais faire suivre à l'élève les étapes de l'évolution historique. Mais, même si l'on ne partage pas cette vision de l'apprentissage, on ne peut qu'être d'accord avec la position de Felix Klein qui considère qu'une réflexion sur les synergies nécessaires entre évolution des mathématiques et évolution de l'enseignement, ne peut se faire uniquement à travers une réflexion mathématique

sur les contenus d'enseignement. Elle doit penser les transpositions didactiques, les stratégies qui peuvent rendre ces synergies possibles dans un système donné. Si Felix Klein a une vision de l'enseignement et l'exprime, il laisse en revanche aux enseignants la responsabilité de penser le détail de ces transpositions, d'imaginer les stratégies précises, de construire les ressources nécessaires pour l'enseignement. Cela relève de leur expertise. Il a d'ailleurs affaire à une audience de professeurs experts. Il voit ainsi son livre :

« seulement comme un stimulus mental, non comme un manuel détaillé. »  
(ibidem, p. IV, notre traduction).

Il insiste enfin sur les connexions entre domaines mathématiques, voyant également dans ces dernières le moyen pour les enseignants de faire sens utilement de toutes ces évolutions :

« Ma tâche sera toujours de montrer les connexions mutuelles entre les problèmes des divers champs. J'espère ainsi vous rendre plus facile la capacité d'extraire de la grande base des connaissances existantes une inspiration pour votre enseignement. » (ibidem, p. IV, notre traduction).

La situation aujourd'hui n'est pas celle du début du 20<sup>ème</sup> siècle mais penser les rapports entre évolution des mathématiques et évolution de l'enseignement est une question toujours difficile, et qui se pose dans des termes sans cesse renouvelés. Elle est renouvelée par l'évolution des sciences mathématiques mais aussi par l'évolution des sociétés et des attentes qui s'y expriment vis-à-vis de l'enseignement des mathématiques, comme par celle des moyens matériels et humains qui sont mis au service de cet enseignement.

S'agissant de l'évolution des sciences mathématiques, l'évolution est multiforme, et comme le soulignait Laszlo Lovász, président de l'Union mathématique internationale (IMU), dans une conférence à Lisbonne consacrée au futur de l'enseignement des mathématiques en Europe (Lovász, 2007), même au sein de la communauté mathématique, chacun ne connaît sérieusement aujourd'hui qu'une portion très limitée du paysage global. Rendre, même en restant essentiellement au niveau des idées, sans viser l'opérationnalité technique, les mathématiques qui se sont développées au cours du 20<sup>ème</sup> siècle accessibles aux enseignants et source d'inspiration pour eux, comme avait voulu le faire Felix Klein en son temps est un réel défi. C'est un défi que nous essayons de relever au sein de l'ICMI, dans une collaboration étroite entre mathématiciens et didacticiens, à travers le projet Felix Klein.

### 3. Le projet Felix Klein

Il s'agit en effet dans ce projet de rendre des développements mathématiques importants du 20<sup>ème</sup> siècle accessibles aux enseignants et source d'inspiration pour leur enseignement. Des développements et non les développements car tous ne sont sans doute pas accessibles avec la culture mathématique d'un enseignant de lycée, même intéressé aux mathématiques, tous ne peuvent pas nécessairement être source

d'inspiration pour l'enseignement secondaire. Il s'agit de penser ces développements en termes de contenus comme de pratiques, sans oublier leurs effets sur les mathématiques fondamentales de l'École. Il s'agit aussi d'organiser la collaboration nécessaire entre communautés pour mener à bien un tel projet, et d'utiliser les technologies actuellement disponibles pour organiser le travail, penser les ressources utiles et leur dissémination.

Pour piloter ce projet, l'ICMI et l'IMU ont constitué un comité de pilotage composé de huit membres, mathématiciens et/ou didacticiens, dirigé par le président de l'ICMI, Bill Barton, qui a lui-même une longue expérience d'enseignant du secondaire. L'ambition du groupe est de produire un **livre** de 300 pages environ pour les professeurs du secondaire et plus particulièrement ceux enseignant au niveau lycée. Ce livre, qu'il est prévu de publier simultanément en plusieurs langues, doit être stimulant, combiner des chapitres centrés sur des domaines mathématiques, comme l'étaient ceux des ouvrages de Felix Klein, et des chapitres « transversaux » mettant en évidence l'importance des connections internes et externes en mathématiques, ainsi que les façons de travailler des mathématiciens. Comme souligné plus haut, Felix Klein déjà se donnait l'ambition de montrer les connexions entre domaines mathématiques. Au cours du 20<sup>ème</sup> siècle ces connections se sont multipliées mais se sont aussi développées les connexions avec de nombreux domaines hors des mathématiques, bien au-delà des relations traditionnelles entre mathématiques et physique. C'est pourquoi, tout en étant particulièrement attentifs à ces questions tout au long du livre, il nous a semblé nécessaire de réserver deux chapitres du livre à ces questions, l'un centré sur les connexions internes, l'autre sur les connexions externes.

Mais la publication de cet ouvrage ne constitue qu'une des facettes du projet. L'ambition est aussi :

- de mettre en place et alimenter régulièrement un site web de type wiki évolutif, complétant le livre par des **vignettes** et proposant des ressources pour l'enseignement, notamment des exemples de réalisations dans différents contextes,
- d'organiser des **conférences** et des **ateliers** Klein où des mathématiciens, des enseignants, des didacticiens travailleront ensemble, testant les réalisations et les critiquant, élaborant des contributions.

### 3.1. Les conférences Klein et le projet Klein en langue portugaise

La première conférence a eu lieu à l'université de Madère en octobre 2009 à l'initiative du CIM (Centre international de mathématiques) et elle a accueilli environ 100 participants avec une forte proportion de portugais et brésiliens. C'est au cours de cette conférence qu'est née en fait l'idée de vignette Klein précisée ci-dessous. La conférence de Madère eut une autre conséquence. Elle fut à l'origine du projet Klein en langue portugaise<sup>(3)</sup>. Ce projet, piloté par la Société Mathématique Brésilienne, et qui implique toutes les sociétés liées au mathématiques ou à leur

---

(3) <http://www.sbm.org.br/projetoklein.asp>

enseignement au Brésil (une première dans ce pays où les tensions entre communautés peuvent être particulièrement fortes), vise à assurer la traduction du livre en portugais, à préparer des ressources en portugais particulièrement adaptées pour les enseignants brésiliens et à organiser des formations associées pour les enseignants. Substantiellement financé par le gouvernement brésilien, il a eu ces deux dernières années un développement exemplaire. L'appel à vignettes lancé a, par exemple, conduit à la production de près de 80 vignettes. Vingt d'entre elles, sélectionnées, ont été soumises à l'examen d'enseignants, lors d'ateliers thématiques, et sont actuellement en cours de révision, suite à cet examen qui sert aussi à identifier les documents complémentaires nécessaires. Commence à en émerger une littérature visant à répondre aux besoins mathématiques spécifiques des enseignants qui, apparemment, n'existait pas ou peu jusqu'ici. Les pilotes du projet reçoivent de plus en plus de demandes pour organiser de telles formations et les enseignants qui y participent, très déçus au départ par la tâche, inusuelle et difficile de lecture et d'appropriation d'une vignette, se sentent réellement partenaires du projet, à voir comment leurs réactions et les commentaires qu'ils produisent à l'issue d'un travail de plusieurs heures sur ces textes de quelques pages, sont pris en compte.

Depuis cette première conférence, plusieurs autres ont été organisées, comme le montre le site du projet. La dernière en date, juste après les journées de Grenoble de l'APMEP, a regroupé une quarantaine de participants à l'AIM (American Institute of Mathematics) à Palo Alto, et l'essentiel du travail y a été consacré à la discussion et préparation conjointe de vignettes.

### 3.2. Les vignettes Klein

Comme mentionné plus haut, l'idée de vignette Klein a émergé des discussions menées lors de la conférence de Madère. De nombreux participants y ont en effet exprimé le souhait que soit créé un format de contribution qui permette à la fois de nourrir d'exemples la lecture de chapitres qui seraient nécessairement très synthétiques, et aussi de favoriser une large participation de la communauté, au-delà du petit nombre de personnes qui pourraient être impliquées dans l'écriture du livre. Cette idée a ensuite été précisée par le comité de pilotage pour aboutir à un cahier des charges des vignettes. Celui-ci est encore susceptible d'évoluer mais on demande d'abord à une vignette d'être courte (autour de cinq pages et certainement moins de dix), d'où le choix du terme vignette, donc centrée sur un sujet précis. Elle doit débiter par un objet technologique, une situation ou un problème, a priori susceptibles de stimuler l'intérêt professionnel d'un enseignant du secondaire. La compréhension de l'objet, de la situation ou la résolution du problème doivent conduire à des mathématiques du 20<sup>ème</sup> siècle. L'accent doit être mis sur les idées importantes et il n'est pas question d'y rentrer trop avant dans des détails techniques pour rester accessible à des enseignants de lycée, mais cependant il nous semble essentiel que les mathématiques y soient bien visibles. La vignette doit aussi rendre clair pourquoi le sujet traité est important et ce qu'il est essentiel d'en retenir. C'est pourquoi nous souhaitons que chaque vignette ait une « morale » et que cette morale soit explicite. Elle doit enfin fournir des références facilement accessibles, si possible

en ligne, permettant d'approfondir la réflexion mathématique et/ou de penser des exploitations didactiques.

La première vignette, proposée par Bill McAllum<sup>(4)</sup>, part d'une question posée par des enseignants américains lors d'une séance de formation : est-ce que deux triangles qui ont la même aire et le même périmètre sont isométriques ? Contrairement à ce que l'on pourrait penser, la réponse est : Non. La vignette commence par poser le problème dans un cas particulier, celui du triangle rectangle de côtés 3, 4 et 5, et invite le lecteur à y réfléchir, avant de fournir un contre-exemple dont les côtés ont des mesures rationnelles : 41/15, 101/21 et 156/35, dont on peut légitimement se demander comment il a pu être trouvé. Comme le montre la traduction de Catherine Combelles publiée dans le présent dossier, l'auteur montre dans la vignette comment ce problème élémentaire débouche, via un paramétrage adéquat des triangles, sur celui de la recherche de points rationnels de courbes elliptiques et comment il peut être résolu. La morale souligne que les courbes elliptiques jouent un rôle crucial en théorie des nombres et ont des applications importantes aujourd'hui en cryptographie, mais aussi que la vignette illustre une idée fondamentale des mathématiques modernes, celle qui consiste, pour résoudre un problème particulier, à situer son objet dans un espace plus général et à trouver un moyen approprié de paramétrer cet espace.

Quand nous avons réfléchi avec Graeme Cohen sur ce que pourrait être le contenu du chapitre qui, reprenant le titre de l'un des chapitres de l'ouvrage de Felix Klein, s'intitulait : *Fonctions et analyse*, très vite, il nous a semblé que le théorème du point fixe de Banach devrait y occuper une place importante. Ce théorème qui assure que, *si  $f$  est une application contractante dans un espace métrique complet<sup>(5)</sup>,  $f$  a un point fixe unique et que toute suite définie par la récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ , quel que soit son premier terme, converge vers ce point<sup>(6)</sup>*, est, en effet :

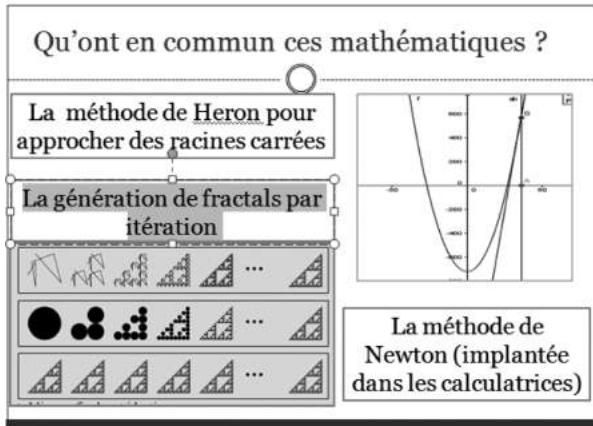
- un théorème central en analyse à la fois pour assurer l'existence d'objets et pour les approcher, permettant par là-même d'établir des connexions entre travail qualitatif et quantitatif en analyse,
- un théorème déjà présent, au moins implicitement, dans l'enseignement secondaire dans le contexte de fonctions d'une variable réelle mais dont l'extension aux espaces fonctionnels montre la puissance de l'analyse développée au 20<sup>ème</sup> siècle,
- un théorème qui a des applications diverses, à la fois internes et externes aux mathématiques,
- un théorème, enfin, qui permet de revisiter des situations mathématiques connues et d'établir des connexions entre des mathématiques très anciennes et des mathématiques très actuelles.

(4) [http://wikis.zum.de/dmuw/Heron\\_Triangles\\_and\\_Elliptic\\_Curves](http://wikis.zum.de/dmuw/Heron_Triangles_and_Elliptic_Curves)

(5) Une application contractante  $f$  dans un espace métrique  $E$  muni de la distance  $d$  est une application de  $E$  dans  $E$  pour laquelle, il existe un réel positif  $k$  strictement inférieur à 1 tel que, pour tous  $x$  et  $y$  dans  $E$ , l'on ait :  $d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$ .

(6) De plus si  $\alpha$  est le point fixe, l'on est alors assuré que, pour tout  $n$ ,  $d(u_n, \alpha) \leq k^n d(u_0, \alpha)$ .

M'inspirant de mon expérience de didacticienne (Artigue, 2001), d'enseignante d'analyse au CAPES et de formations mathématiques d'ouverture mises en place pour les PLC2 avec Thierry Raoul, lorsque je travaillais à l'IUFM de Reims, j'avais alors envisagé une vignette qui débiterait par la question suivante :



La méthode de Heron pour approcher les racines carrées, remonte au 3<sup>ème</sup> siècle de notre ère. Elle est familière aux enseignants de lycée français car elle est proposée dans la plupart des manuels de terminale, dans le chapitre consacré à l'étude des suites. Nous reproduisons ci-après, ce qui n'est en revanche pas le cas dans les manuels, sa présentation initiale dans les *Métriques* de Heron à partir de l'extrait traduit par J.P. Levet proposé dans (Chabert, 2010). Il s'agit de déterminer le côté d'un carré d'aire 720.

« Puisque 720 n'a pas de côté rationnel, nous extrairons le côté avec une très petite différence de la façon suivante. Comme le premier nombre carré plus grand que 720 est 729 qui a pour côté 27, divise 720 par 27, cela fait 26 et  $\frac{2}{3}$ , ajoute 27 cela fait  $53\frac{2}{3}$  ; prends-en la moitié, cela fait  $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ . En fait,  $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$  multiplié par lui-même donne  $720\frac{1}{36}$  ; de sorte que la différence (sur les carrés) est  $\frac{1}{36}$ . Si nous voulons rendre cette différence inférieure encore à  $\frac{1}{36}$ , nous mettrons 720 trouvé tout à l'heure à la place de 729 et, procédant de la même façon, nous trouverons que la différence (sur les carrés) est beaucoup plus petite que  $\frac{1}{36}$ . »

Exprimée en langage actuel, la technique d'approximations successives décrite par Heron consiste à considérer la suite  $(u_n)$  définie par  $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{720}{u_n}\right)$  et  $u_0 = 27$ .



Cette suite, comme le laissent supposer les valeurs des premiers termes obtenues avec la calculatrice symbolique TI-nspire reproduites ci-dessous, converge très rapidement.

$u(1)$	$\frac{161}{6}$
$u(1)$	26.8333333333
$u(2)$	$\frac{51841}{1932}$
$u(2)$	26.832815735
$u(3)$	$\frac{5374978561}{200313624}$
$u(3)$	26.83281573
$u(4)$	$\frac{57780789062419261441}{2153362868952430128}$
$u(4)$	26.83281573
$u(5)$	$\frac{6677239169351578707225356193679818792961}{248846011411572672315389099903834188896}$

Figure 1 : Premiers termes d'une suite de Heron

Le lecteur notera que, si les valeurs approchées affichées ne permettent déjà plus de séparer  $u_3$  et  $u_4$ , ce n'est pas le cas des valeurs exactes, et que le nombre de chiffres des dénominateurs semble quasiment doubler d'un terme au suivant.

Quel lien existe-t-il entre cette méthode, connue dès l'antiquité, et la méthode de Newton, déjà bien plus récente même si elle remonte à plusieurs siècles, et qui est implantée dans ces mêmes calculatrices, pour résoudre de façon approchée des équations mises sous la forme  $f(x) = 0$ , justement parce qu'elle a des propriétés de convergence très intéressantes ? La méthode de Newton consiste, rappelons-le, partant d'une valeur approchée de la racine cherchée, à remplacer la courbe  $C_f$  par sa tangente au point ayant pour abscisse cette valeur approchée (tangente supposée exister et être non horizontale). L'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses donne alors une nouvelle valeur approchée de la racine, en général bien meilleure, et l'on peut itérer le processus. Si l'on considère la fonction  $f(x) = x^2 - 720$ , et si l'on prend comme valeur approchée initiale  $u_0$  non nul, l'équation de la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse  $u_0$  est :  $y - f(u_0) = f'(u_0)(x - u_0)$  et comme  $f'(u_0) = 2u_0$  est non

nul, son intersection avec l'axe des abscisses est le point d'abscisse  $u_1 = u_0 \frac{f(u_0)}{f'(u_0)}$ .

En remplaçant  $f$  et  $f'$  par leurs valeurs, on constate que l'on obtient exactement la suite de Heron. La méthode de Heron peut donc être vue aujourd'hui comme une instantiation particulière de la méthode de Newton.

Les mathématiques engagées jusqu'ici ne sont pas des mathématiques du vingtième siècle et le théorème du point fixe n'y est pas intervenu. Mais son intervention éclaire

cette situation car, derrière ces convergences très rapides, il y a bien en effet des applications contractantes, et même fortement contractantes. Supposons en effet que  $f$  soit une fonction de classe  $C^2$  sur un intervalle  $I$  où  $f'$  ne s'annule pas,  $I$  étant de centre  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 0$ , et soit la fonction  $g$  définie sur  $I$  par  $g(x) = x \cdot \frac{f(x)}{f'(x)}$ . La

fonction  $g$  est dérivable sur  $I$  et  $g'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}$ .  $g'$  est continue sur  $I$  et

$g'(\alpha) = 0$ . Donc, pour tout  $k$  positif et strictement inférieur à 1, il existe un sous-intervalle  $J$  de  $I$  centré lui aussi en  $\alpha$  sur lequel  $g'$  est en valeur absolue inférieure à  $k$  et donc, par le théorème des accroissements finis,  $g$  est contractante de rapport  $k$ .

Alors l'intervalle  $J$  est stable par  $g$  et, pour tout  $u_0$  de  $J$ , la suite  $(u_n)$  définie par  $u_{n+1} = g(u_n)$  converge vers  $\alpha$ . De plus, pour tout  $n$ ,  $|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$ , ce qui explique la convergence extrêmement rapide observée.  $\alpha$  est ce que la théorie des systèmes dynamiques appelle un point fixe super-attractif. Mais cette théorie, qui s'est particulièrement développée dans la deuxième moitié du vingtième siècle, nous montre aussi que, si  $u_0$  n'est pas convenablement choisi, les dynamiques de ces suites de Newton peuvent être en revanche très complexes et de nature chaotique. Nous renvoyons le lecteur à l'excellent article de Tan Lei sur ce thème paru sur le site *Images des Mathématiques*<sup>(7)</sup>.

Même si nous avons fait un lien dans ce dernier paragraphe entre les méthodes de Heron, de Newton et des mathématiques du vingtième siècle, nous en sommes restés à des fonctions d'une variable réelle, celles que l'on manipule au lycée. Mais, comme souligné plus haut, le théorème du point fixe a un champ d'application bien plus large et c'est à une incursion dans cette direction que nous invite le troisième contexte évoqué dans la question initiale, celui de la génération itérative de fractals. Les trois images qui la composent, extraites de (Fisher, 1995) évoquent en effet une convergence vers un objet géométrique ressemblant à un triangle de Sierpiński qui est un objet fractal. Et ce que ces images semblent nous indiquer, c'est que, quelle que soit la figure initiale (comme précédemment nous pouvions affirmer, quel que soit le choix de  $u_0$ ), la suite créée converge vers une même figure qui est un point fixe pour cette suite. Y a-t-il derrière ce phénomène encore une fois une application contractante, et si oui laquelle ? La transformation  $f$  qui permet de passer d'une figure à la suivante est, en fait, une simple combinaison de trois transformations affines : la figure est soumise à une homothétie de rapport  $\frac{1}{2}$  puis trois translations sont effectuées pour obtenir trois copies de cette réduction. Si l'on considère les figures inscrites dans un carré de côté 1 centré à l'origine, les trois transformations mobilisées sont les suivantes :

- $f_1 : (x, y) \rightarrow \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{1}{4} \right)$ ,

(7) <http://images.math.cnrs.fr/La-methode-de-Newton-et-son.html>

- $f_2 : (x, y) \rightarrow \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} - \frac{1}{4} \right)$ ,
- $f_3 : (x, y) \rightarrow \left( \frac{x}{2} - \frac{1}{4}, \frac{y}{2} - \frac{1}{4} \right)$ .

Et à une partie  $A$  du carré, on associe par l'application  $f$  :

$$f(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup f_3(A).$$

À première vue, cette application ne semble pas particulièrement contractante, il faut donc travailler un peu plus pour éclairer la dynamique de cette situation par le théorème du point fixe. Dans la vignette Klein qu'elle a réalisée sur ce thème du point fixe<sup>(8)</sup>, vignette qui suit un scénario un peu différent de celui proposé ici, Christiane Rousseau essaie de donner une idée de la métrique appropriée sur les parties fermées et bornées du plan (la métrique de Hausdorff) sans rentrer dans des détails trop techniques, de la façon suivante. Pour deux telles parties du plan,  $A_1$  et  $A_2$ , elle commence par donner sens à la relation  $d_H(A_1, A_2) \leq \varepsilon$ , pour  $\varepsilon > 0$  en expliquant que cela veut dire que si notre œil a une précision de  $\varepsilon$ , il lui est impossible de distinguer  $A_1$  de  $A_2$ , ce qu'elle formalise ensuite de la façon suivante :

$$\forall P \in A_1 \exists Q \in A_2 d(P, Q) \leq \varepsilon \text{ et } \forall P \in A_2 \exists Q \in A_1 d(P, Q) \leq \varepsilon,$$

$d$  désignant la distance euclidienne usuelle dans  $\mathbb{R}^2$ .

Elle définit ensuite, de façon indirecte, la distance de Hausdorff entre deux ensembles fermés bornés du plan comme l'inf de tous les  $\varepsilon$  positifs tels que cette relation ci-dessus soit satisfaite<sup>(9)</sup>. Avec cette définition, on peut montrer que l'application  $f$  considérée ci-dessus est contractante de rapport  $\frac{1}{2}$ . Ce qui explique l'impression visuelle très rapide de convergence vers un triangle de Sierpiński.

Au-delà de leur exploitation pour la génération de fractals, ces techniques itératives ont aussi été utilisées dans la compression d'images mais elles restent pour l'instant assez peu performantes (Rousseau & Saint Aubin, 2008).

### 3.3. En conclusion

Je m'arrêterai là pour ce qui est du projet Klein qui, jusqu'ici, a progressé beaucoup plus lentement que nous ne l'espérions au début. Car même si le projet suscite un très grand intérêt chaque fois qu'il est présenté, l'écriture de textes répondant aux ambitions que nous nous sommes données, et accessibles à des enseignants dont la formation et la culture mathématique peuvent être très divers suivant les régions du monde et les cultures éducatives, ne va en rien de soi. J'espère cependant que cette brève présentation suscitera des propositions de vignettes de la part des lecteurs du

(8) <http://wikis.zum.de/dmuw/images/b/bd/Banach2.pdf>

(9) On peut définir directement la distance de Hausdorff de deux fermés bornés du plan  $A_1$  et  $A_2$  de la façon suivante  $d_H(A_1, A_2) = \max(\max_{u \in A_1} d(u, A_2), \max_{u \in A_2} d(u, A_1))$ , le fait que  $A_1$  et  $A_2$  soient fermés bornés donc compacts garantissant l'existence de ces maxima. Muni de cette distance, l'ensemble des parties compactes du plan est un espace métrique complet.

bulletin, ainsi que des suggestions pour améliorer les vignettes existantes et aussi pour enrichir les références associées, notamment par des exemples de réalisations avec les élèves ou en formation.

S'agissant de formation, je retiens notamment du travail mené jusqu'ici que les choix à effectuer, quand on se donne le projet de rendre des mathématiques récentes et actuelles sources d'inspiration pour les enseignants, doivent peser différentes potentialités et, en particulier, les suivantes :

- le potentiel épistémologique : les idées mathématiques et métamathématiques que le thème permet de rencontrer, travailler, approfondir, de façon accessible,
- le potentiel didactique : les connexions avec les mathématiques du secondaire (contenu, éclairage de difficultés d'élèves, questions curriculaires, ...),
- le potentiel pratique : les pratiques et techniques mathématiques que le travail sur le thème engage, permet de consolider et développer,
- le potentiel de connexion : les connexions que le thème permet entre points de vue, domaines,
- le potentiel de défi : le potentiel offert pour questionner des visions communes, étonner, susciter l'intérêt,
- le potentiel culturel : le potentiel pour refléter les mathématiques comme aventure humaine et comme science vivante.

Enfin, il me semble important de souligner que, même s'il peut à terme aider à construire des liens entre mathématiques actuelles et enseignement des mathématiques, le projet Klein ne couvre que très partiellement les besoins nécessaires. Car, comme je le soulignais au départ, il ne suffit pas de montrer que des synergies sont possibles, il faut penser les stratégies qui permettront de les faire vivre dans la réalité de la formation des enseignants et dans la réalité des classes. Et ceci me conduit à revenir sur le type de déclaration que j'évoquais au début de ce texte quand j'écrivais : « Il est aussi fréquent d'entendre dire que, comparativement, l'enseignement ne donne aujourd'hui à voir et à pratiquer aux élèves que des mathématiques vieilles de plusieurs siècles, sinon de millénaires, bref une science morte et ce, avec des pratiques elles aussi inchangées, que les liens sont coupés. »

Est-ce vraiment le cas ?

#### **4. Mathématiques actuelles et enseignement : la vision curriculaire**

S'agissant du curriculum, il faut bien sûr distinguer entre ce qui est prescrit (le curriculum visé) et la réalité du terrain (le curriculum réel). Si l'on considère le curriculum visé, pour ce qui est de la France et pour de nombreux autres pays, il est difficile d'adhérer à l'affirmation reproduite ci-dessus. Les efforts faits pour rapprocher les mathématiques enseignées des mathématiques actuelles y sont indéniables. Ceci concerne les contenus comme les pratiques. Je ne chercherai pas à être exhaustive et me bornerai à souligner un certain nombre d'évolutions qui m'en semblent particulièrement caractéristiques :

- la place croissante accordée aux statistiques et probabilités, depuis la réforme des lycées de 2000,
- l'introduction de domaines comme la théorie des graphes, dans cette même réforme,
- l'accent mis sur l'algorithmique,
- les thématiques proposées pour la spécialité Mathématiques en classe de Terminale dans le cadre de la nouvelle réforme des lycées, notamment dans la partie relative aux matrices et aux suites,
- la mise en place de dispositifs spécifiques exigeant l'interdisciplinarité au lycée avec les TPE en première dans la réforme de 2000 et le nouvel enseignement d'exploration MPS en seconde depuis 2010<sup>(10)</sup>, avec des horaires conséquents,
- l'accent mis sur les démarches expérimentales en mathématiques, même si l'épreuve expérimentale de mathématiques au baccalauréat n'a finalement jamais réussi à dépasser elle-même le stade expérimental, sur la modélisation, sur les démarches d'investigation et de projet, tout cela en s'appuyant sur les potentialités offertes par la technologie.

Je pourrais entrer davantage dans les détails et multiplier les citations de textes officiels pour appuyer mon discours, mais je ne pense pas que ce soit nécessaire pour un lecteur du Bulletin de l'APMEP. Aujourd'hui, par exemple, si l'on regarde un domaine comme celui des statistiques, les programmes français sont sans doute parmi les plus ambitieux pour l'enseignement secondaire. Les thèmes qui sont proposés pour le nouvel enseignement de la spécialité mathématiques concernent pour plusieurs d'entre eux des mathématiques du XX<sup>ème</sup> siècle (principes du calcul de pertinence d'une page web, modèles de diffusion, modèles proie-prédateur). En fait, ce sont les mathématiques classiques, et notamment la géométrie, qui ont fait les frais de cette évolution, qui se combine avec des réductions horaires. Les élèves, pour ne citer qu'un exemple, sortiront du nouveau lycée sans avoir rencontré officiellement d'autres transformations géométriques que les symétries, au début du collège, et faiblement les translations. Et après l'enseignement de la géométrie, c'est celui de l'analyse qui est drastiquement réduit dans la dernière réforme en série scientifique et perd la cohérence et consistance qu'avait essayé de lui redonner la réforme du lycée de 2000.

Si l'on considère les textes, le problème n'est donc pas en France celui d'un enseignement des mathématiques qui serait par essence figé, dans ses contenus et dans ses pratiques. C'est plutôt celui d'un enseignement à qui l'on demande de bouger, et même de bouger beaucoup, sans vouloir souvent considérer ce que ces changements nécessitent pour être viables, pour que puissent s'amorcer et se développer des dynamiques d'évolution productives, et sans se donner les moyens jusqu'ici d'étudier sérieusement les dynamiques réelles que l'on ne peut que très

(10) L'accent est aussi mis sur l'interdisciplinarité au collège via les thèmes de convergence introduits par les programmes de 2005 et l'expérience EIST d'enseignement intégré des sciences qui ne concerne cependant pas les mathématiques, sans oublier le socle commun pour lequel chaque discipline est censée contribuer à la maîtrise de différentes compétences.

partiellement anticiper, pour apporter les régulations nécessaires, répondre aux besoins de formation, produire des ressources adaptées<sup>(11)</sup>. C'est celui de la multiplication des dispositifs d'enseignement et des intervenants, les problèmes de cohérence qui en résultent, de plus en plus ressentis par les enseignants. C'est celui d'une formation continue sinistrée alors que les évolutions engagées la rendent d'autant plus nécessaire, et dont les maigres moyens sont de plus pompés par la nécessité de faire fonctionner une réforme catastrophique de la formation initiale (Arnoux, 2011).

Il existe bien sûr des réussites locales et tous ceux qui travaillent, notamment au sein des IREM, de l'APMEP ou de l'IFÉ (Institut Français d'Education) qui a succédé à l'INRP, peuvent en faire état. Je me bornerai à citer, pour ne prendre que quelques exemples récents, le recensement effectué par la Commission inter-IREM Lycées des travaux des IREM concernant l'algorithmique qui va prochainement donner lieu à une publication inter-IREM et montre la richesse des documents produits par la communauté pour accompagner cette évolution curriculaire, le dossier coordonné par Catherine Combelles et publié avant même la fin 2011 dans le Bulletin de l'APMEP concernant l'enseignement MPS (Combelles, 2011), les travaux menés au sein des groupes associés à l'IFÉ : e-Colab, Exprime ou le groupe CDampères issu de la commission inter-IREM Didactique<sup>(12)</sup>, et concernant ce dernier, notamment, la série de brochures publiées par l'IREM de Poitiers pour le collège et maintenant la seconde (cf. par exemple (Chevalarias, T. & al., 2009), (Chevalarias, N. & al., 2011), pour soutenir un enseignement décloisonné qui se développe à partir de questions à fort pouvoir générateur (des parcours d'étude et de recherche au sens de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 2007)). Mais, ce que montrent aussi ces réalisations, c'est la difficulté de faire face aux multiples contraintes (comment par exemple rendre l'interdisciplinarité effective en MPS si les enseignants de disciplines différentes ne peuvent jamais travailler ensemble avec les élèves ?), c'est l'investissement demandé que, seul, le soutien d'une communauté a rendu acceptable. Dans les secteurs les plus fragiles de notre système éducatif, ces changements en cascade peuvent simplement détruire des équilibres, certes insatisfaisants mais qui avaient le mérite d'exister. Car l'on sent bien combien la création de synergies productives ne peut se faire sans faire l'effort de construire de nouvelles cohérences, aussi attentives aux domaines classiques et à la façon dont l'évolution des connaissances et celle des pratiques peut inspirer l'évolution de leur enseignement qu'aux nouveaux domaines, thèmes, questionnements que l'on souhaite introduire, et attentives aussi à leurs interactions possibles. Les sciences mathématiques, nul ne saurait le nier, ont plus que les autres sciences une dimension

(11) De ce point de vue, la création toute récente par la DGESCO d'une commission de suivi des programmes de mathématiques, réclamée depuis longtemps par différentes institutions et notamment l'APMEP est une nouvelle a priori intéressante. Reste à voir quels seront ses moyens d'action et comment seront pris en compte ses productions.

(12) <http://educmath.inrp.fr/Educmath/recherche/equipes-associees/e-colab/>  
<http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/documents/cdamperes/>  
<http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/documents/exprime/>

cumulative, et il ne faudrait pas que la recherche de synergies entre les mathématiques qui s'enseignent et les mathématiques qui se font, conduise à la déshérence des domaines classiques ou à un enseignement où l'évolution des pratiques serait réservée aux domaines et aux dispositifs nouvellement introduits.

Ces problèmes, comme tous ceux qui concernent de façon générale l'éducation, ne sont en aucun cas faciles à résoudre, et je voudrais dans les lignes qui suivent élargir mon propos au-delà de la seule question des synergies entre mathématiques qui se font et mathématiques qui s'enseignent. L'évolution du système éducatif est pour nous tous, aujourd'hui, source d'inquiétude et nous avons l'impression que loin d'avancer vers la résolution des problèmes existants, nous voyons les obstacles et les difficultés s'accumuler. Faut-il pour autant sombrer dans le catastrophisme et idéaliser les temps bénis où, par exemple, les horaires étaient bien plus conséquents, où la filière scientifique débutait dès la classe de seconde? Je ne le pense pas. Quand je vois le rapport que la plupart de nos intellectuels, de nos hommes politiques, des journalistes ont aux mathématiques, pour ne citer qu'eux car ils sont les plus médiatiquement visibles, je ne peux m'empêcher de me dire qu'en dépit des moyens dont nous avons longtemps disposé pour l'enseignement des mathématiques, nous avons partiellement échoué (ce faisant je ne m'adresse pas bien sûr à ceux qui entrent aujourd'hui dans la carrière ou y sont rentrés récemment). Nous avons sans aucun doute réussi à former des scientifiques et des mathématiciens de qualité, mais nous avons échoué à assurer une formation mathématique, peut-être modeste mais néanmoins de qualité, à des centaines de milliers si ce n'est des millions d'élèves auxquels elle était pourtant accessible. Nous avons échoué à faire que, pour eux, les mathématiques soient un instrument de questionnement et d'intelligibilité du monde, et non pas une simple discipline scolaire<sup>(13)</sup>. Nous avons échoué, sans doute parce que nous n'avons pas suffisamment compris que c'était là notre première mission, que nous avons trop vite accepté l'échec, le manque de motivation de nos élèves, peut-être aussi parce que la pression de la société sur nous n'a pas été assez forte.

Aujourd'hui la situation est toute différente. Le socle commun veut changer le contrat social de l'école et, dans le même temps, les conditions faites à l'enseignement des mathématiques sont de plus en plus difficiles. Pourtant, ce que nous n'avons pas réussi à faire du temps des vaches grasses, nous devons le tenter aujourd'hui et nous devons nous battre pour le réussir. Ce défi, je pense que nous pouvons le relever. Il y a à cela de multiples raisons, mais une essentielle est que nous disposons aujourd'hui de connaissances sur l'enseignement et l'apprentissage, sur le fonctionnement des systèmes didactiques qui modifient profondément les outils dont nous disposons pour penser l'enseignement et tirer le meilleur profit de nos marges de manœuvre, ainsi que pour montrer la nécessité d'autres formes de pilotage pour le système éducatif. À ceci s'ajoute que, grâce à l'évolution technologique, de plus en plus, presque partout dans le monde, on peut avoir aujourd'hui accès à des ressources de qualité, on peut mutualiser les connaissances, et des collaborations

---

(13) On pourra sur ce plan se référer au récent document publié par l'UNESCO sur les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base (Artigue, 2011).

peuvent s'organiser moins dépendantes de la proximité géographique immédiate. La vision collaborative du métier d'enseignant, de la conception de ressources progresse d'ailleurs, même dans une culture comme la nôtre qui y est si peu préparée, comparativement à d'autres. Si nous pouvons relever ce défi, c'est parce que nous ne sommes pas les seuls à vouloir réaliser cette ambition d'un enseignement mathématique de qualité pour tous et que d'autres peuvent nous y aider. C'est cette solidarité entre communautés, c'est cette énergie, cette volonté et créativité dans les contextes les plus difficiles que j'ai éprouvée, année après année, au sein d'ICMI et qui nourrit un optimisme que certains trouveront peut-être démesuré dans les circonstances actuelles, et la volonté de continuer à marcher, comme nous y ont incités ces journées nationales de l'APMEP.

### Références

Arnoux, P. (2011). La mastérisation de la formation des enseignants. *Tangente Éducation*, n° 18, 8-11.

Artigue M. (2001). L'entrée dans le champ conceptuel de l'analyse : réformes curriculaires, recherches didactiques, où en est-on ?, in T. Assude et B. Grugeon (eds), *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, année 2000, p. 277-301.

Artigue, M. (coord.) (2011). *Les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base*. Paris : UNESCO.

<http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/191776F.pdf>

Chevalarias, T. & al. (2009). Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les angles. IREM de Poitiers.

Chevalarias, N. & al. (2011). Enseigner les mathématiques en seconde : trois parcours sur les fonctions. IREM de Poitiers.

Chevallard, Y. (2007). Les mathématiques à l'école : pour une révolution épistémologique et didactique. *Bulletin de l'APMEP*, n° 471, 439-461.

Combelles, C. (coord.) (2011). Dossier MPS. *Bulletin de l'APMEP*, n° 495, 392-455.

Fisher, Y. (1995). *Fractal Image Compression, Theory and Application*. Berlin: Springer Verlag.

Klein, F. (1924). *Elementarmathematik von h"olderen Standpunkte aus*. Arithmetik, Algebra, Analysis. Berlin: Springer (English translation by E.R. Hedrick and C.A. Noble of the third edition, Macmillan, New York, 1932).

Lovász, L. (2007). Trends in Mathematics, and How they could Change Education? Conférence Européenne « Le Futur de l'Éducation Mathématique en Europe », Lisbonne, Décembre 2007. <http://www.cs.elte.hu/~lovasz/lisbon.pdf>.

Rousseau, C., Saint -Aubin, Y. (2008). *Mathématiques et Technologie*. Springer Verlag.

Schubring, G. (2011). Conceptions for relating the evolution of mathematical concepts to mathematical learning – epistemology, history, and semiotics interacting. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 77.1, 79-104.