

Calendrier, mathématiques et algorithmique

Marc Roux^(*)

Introduction

Des amis allemands m'ont offert un beau calendrier. Ignorant tout de la langue de Goethe, et en particulier la traduction de « *lundi, mardi, mercredi, ...* », je me suis aperçu très vite que sa consultation ne m'apportait guère ; et j'ai ainsi pris conscience de l'utilité première du calendrier : indiquer la correspondance entre jours du mois et jours de la semaine. J'ai alors pensé qu'il devait être possible de réaliser un fichier informatique dans lequel, en entrant le millésime, on obtiendrait automatiquement le calendrier de l'année choisie ; et que ce travail pourrait trouver sa place dans l'enseignement de l'algorithmique au lycée. Au cours de cette construction, et de quelques digressions, nous rencontrerons plusieurs thèmes inscrits (ou non) au programme de mathématiques : suites, dénombrements, fonction partie entière, congruences, connecteurs logiques, probabilités, modélisation, ...

1. Calendriers

Il existe et il a existé bien des types de calendriers : lunaires, luni-solaires, solaires et autres ; dans cette étude, je ne considérerai que notre calendrier solaire usuel, dit grégorien, et son prédécesseur le calendrier julien. Pour découvrir les autres, voir 4.5. L'année (durée de la révolution de la Terre autour du Soleil) vaut environ 365 jours ; mais en fait, elle est proche de $365 + 1/4$, d'où l'existence des années bissextiles. Dans le calendrier julien (de Jules César), il y en avait simplement une tous les 4 ans. Mais on s'aperçut que cet ajout était excessif d'environ $1/100$, d'où l'idée de supprimer une année bissextile tous les 100 ans (millésimes se terminant par 00) ; mais cette suppression, à son tour, est excessive, d'où le rajout d'une année bissextile tous les 400 ans (millésimes divisibles par 400). On obtient ainsi le calendrier grégorien, du nom du pape Grégoire XIII qui l'institua dans le monde chrétien, en 1582. Nous l'utiliserons encore pendant pas mal de siècles (mais pas éternellement car la durée de l'année n'est évidemment pas *exactement* égale à $365 + 1/4 - 1/100 + 1/400$; un jour lointain une nouvelle correction sera nécessaire⁽¹⁾) ; les calculs qui suivent sont donc valables pour les années allant de 1583 à quelques milliers.

(*) marc.roux15@wanadoo.fr

(1) Wikipedia (article « Calendrier grégorien ») dit que « ... on arrive à une année de 365,2425 jours au lieu de 365,24219 jours soit un excès de trois jours en 10 000 ans. Il a été proposé d'amender la règle pour considérer les années multiples de 4 000 comme normales. Mais du fait du raccourcissement de l'année tropique évalué à 0,5 s par siècle et de l'allongement du jour de 1,64 milliseconde par siècle, il est illusoire d'arriver à ce niveau de précision, les incertitudes sur la durée de l'année sur 10 000 ans étant du même ordre de grandeur ».

Dans la partie 4, nous évoquerons rapidement des prolongements possibles : établissement des calendriers pour les années antérieures à 1583, ainsi qu'ajout de renseignements autres que les jours de la semaine, et découverte d'autres calendriers dans la bibliographie.

2. Mathématiques

2.1 Modélisation et notations

Un calendrier est une liste (ou suite finie) de 12 listes (les mois), de longueurs 28, 29, 30 ou 31, à termes pris dans l'ensemble {LUN, MAR, MER, JEU, VEN, SAM, DIM}, dans un ordre immuable et circulaire. Mais en fait ces 12 listes ne sont que des sous-listes, consécutives, d'une liste A (comme Année) de 366 ou 365 (selon que l'année est bissextile ou non) jours de la semaine, chacun étant représenté par un entier modulo 7 : DIM = 0, LUN = 1, etc⁽²⁾. Ainsi nous pouvons dire que le successeur du jour k est toujours $k + 1$, en prenant l'addition au sens du groupe cyclique $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Si on désigne par L la longueur de l'année ($L = 365$ ou 366), on aura pour tout k , $2 \leq k \leq L$:

$$A_k = A_{k-1} + 1 \pmod{7}.$$

Les mois seront alors les listes suivantes : JANVIER = (A_1, \dots, A_{31}) ;
 si l'année n'est pas bissextile : FÉVRIER = (A_{32}, \dots, A_{59}) , MARS = (A_{60}, \dots, A_{90}) ,
 AVRIL = (A_{91}, \dots, A_{120}) , etc. ;
 si l'année est bissextile : FÉVRIER = (A_{32}, \dots, A_{60}) , MARS = (A_{61}, \dots, A_{91}) , AVRIL
 = (A_{92}, \dots, A_{121}) , etc.

2.2 Dénombrer les calendriers

Ce qui précède montre qu'un calendrier est totalement déterminé dès qu'on connaît le jour de la semaine correspondant au 1er janvier (ou, plus généralement, dès qu'on connaît le jour de la semaine d'une date précise), et qu'on sait si l'année est bissextile ou non. Une question rudimentaire de dénombrement par arbre permettra à tout lycéen de trouver qu'il existe 14 calendriers possibles. Nous désignerons par Blun, Bmar, Bmer, etc. les calendriers des années bissextiles commençant respectivement par un lundi, un mardi, un mercredi, ..., et de même par Nlun, Nmar, Nmer, ... les années non bissextiles. Par exemple 2011 est du type Nsam, 2012 est du type Bdim. La question se pose de savoir si ces 14 calendriers sont effectivement possibles ; on peut également s'interroger sur la fréquence de chacun d'eux.

365 est congru à 1 modulo 7, ce qui entraîne que, si l'année n est non-bissextile et commence par un jour k , l'année $n + 1$ commence par le jour $k + 1 \pmod{7}$, et si n est bissextile, $n + 1$ commence par $k + 2 \pmod{7}$. Si n est bissextile, $n + 4$ (bissextile en général) commence par le jour $k + 5$; 5 et 7 étant premiers entre eux, on est assuré d'obtenir par itération chaque élément de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. En termes plus concrets : les années bissextiles 2000, 2004, 2008, 2012, 2016, 2020, 2024 commencent respectivement

(2) Choix arbitraire, bien sûr ; dans l'ouvrage cité en 4.5, Jean Lefort opte pour 0 = lundi, 1 = mardi, etc.

par SAM, JEU, MAR, DIM, VEN, MER, LUN, et le cycle se reproduit ensuite jusqu'en 2100 non compris, car 2100 n'est pas bissextile ; les calendriers Blun, Bmar, Bmer, etc. se rencontrent donc périodiquement, tant qu'on n'atteint pas une année séculaire. Les calendriers d'années non bissextiles se rencontrent également tous, puisque 2001, 2002, 2003, 2005, 2006, 2007, 2009, 2010 commencent respectivement par LUN, MAR, MER, SAM, DIM, LUN, JEU, VEN ; mais ici on ne distingue pas de cycle régulier, LUN revient avant que les 7 jours soient apparus ; nous reprendrons plus loin l'étude des fréquences.

2.3 Trouver les années bissextiles

Une bonne occasion de faire manipuler les connecteurs ET, OU, NON : la définition des années bissextiles du calendrier grégorien doit amener nos élèves à écrire : *n est bissextile si et seulement si (n est divisible par 4 ET n non divisible par 100) OU (n est divisible par 400)*.

En vue de la construction d'algorithmes, et de leur mise en pratique sur différents logiciels, il sera bon de montrer que « n est divisible par p » se traduit par « n/p est un entier », ou encore, en notant E la fonction Partie entière, « $n/p - E(n/p) = 0$ ».

D'autre part, on pourra s'interroger sur la nécessité de parenthèses dans la condition ; en général, p, q, r étant des propositions, $(p \text{ et } q) \text{ ou } r$ n'est pas équivalent à $p \text{ et } (q \text{ ou } r)$; mais ici, p (n multiple de 4) et r (n multiple de 400) ne sont pas indépendants, car r ne peut pas être vrai sans que p le soit ; au temps où nos élèves étaient familiers des tables de vérité, nous aurions pu leur montrer que ceci élimine les deux seules lignes où les résultats sont différents :

p	q	r	$p \text{ et } q$	$(p \text{ et } q) \text{ ou } r$	$q \text{ ou } r$	$p \text{ et } (q \text{ ou } r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	V	F	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	F	F	F

On peut donc, ici, se passer de parenthèses, mais les programmes étant ce qu'ils sont, il vaudra mieux les conserver.

2.4 Trouver le premier jour de l'année

Un découpage en questions intermédiaires plus ou moins détaillé, selon le niveau de la classe, devrait permettre aux élèves d'obtenir les résultats suivants :

En désignant comme indiqué plus haut DIM par 0, LUN par 1, etc. (entiers modulo 7), notons $I(n)$ le premier jour de l'année n . Par commodité, et au mépris de toute vraisemblance historique, nous supposons l'existence d'une année 0 (bissextile puisque 0 est divisible par 400 ; et commençant le 1er janvier). Le 1er jour de l'année

n s'obtient en ajoutant à $I(0)$: le nombre n (car une année « normale » amène un décalage d'un jour) + le nombre d'années bissextiles ayant précédé n .

Si les années bissextiles étaient toutes celles dont le millésime est divisible par 4 (calendrier julien), le nombre d'années bissextiles strictement comprises entre 0 et n

serait $E\left(\frac{n-1}{4}\right)$; il convient d'en retirer les millésimes divisibles par 100, puis d'ajouter ceux divisibles par 400 ; et d'ajouter 1, puisque l'année 0 est bissextile ; on obtient donc :

$$I(n) \equiv I(0) + 1 + n + E\left(\frac{n-1}{4}\right) - E\left(\frac{n-1}{100}\right) + E\left(\frac{n-1}{400}\right) \pmod{7}.$$

Or le 1er janvier 2012 est un dimanche, autrement dit $I(2012) \equiv 0 \pmod{7}$; ceci nous permet de calculer $I(0)$:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv I(0) + 2012 + 1 + E\left(\frac{2011}{4}\right) - E\left(\frac{2011}{100}\right) + E\left(\frac{2011}{400}\right) \\ &\equiv I(0) + 2013 + 502 - 20 + 5 = I(0) + 2500 \pmod{7}. \end{aligned}$$

$2500 \equiv 1 \pmod{7}$ d'où $I(0) \equiv -1 \equiv 6 \pmod{7}$; et $I(0) + 1 \equiv 7 \equiv 0 \pmod{7}$; finalement on a :

$$I(n) \equiv n + E\left(\frac{n-1}{4}\right) - E\left(\frac{n-1}{100}\right) + E\left(\frac{n-1}{400}\right) \pmod{7}. \quad (1)$$

2.5 Fréquences et probabilités

Si je choisis une année « au hasard » (après 1583), quelle est la probabilité pour qu'elle commence par un dimanche, un lundi, etc. ? Le « bon sens » incite à répondre que ces probabilités sont toutes égales à $1/7$. Montrons que cette intuition est incorrecte.

Le cycle des années bissextiles a pour longueur 400, qui est premier avec 7, donc les calendriers se retrouvent à l'identique avec une périodicité $\text{PPCM}(400,7) = 400 \times 7 = 2800$; mais : pour tout m , $0 \leq m < 400$, on a :

$$\begin{aligned} I(m+400) - I(m) &= m + 400 + E\left(\frac{m+400-1}{4}\right) - E\left(\frac{m+400-1}{100}\right) \\ &\quad + E\left(\frac{m+400-1}{400}\right) - m - E\left(\frac{m-1}{4}\right) + E\left(\frac{m-1}{100}\right) - E\left(\frac{m-1}{400}\right) \\ &= 400 + 100 - 4 + 1 = 497 \pmod{7} \end{aligned}$$

Or $497 \equiv 0 \pmod{7}$. Ce qui signifie que 400 ans contiennent un nombre entier de semaines ; et que les calendriers se retrouvent à l'identique tous les 400 ans. Donc il revient au même de chercher une fréquence sur la suite infinie des années ou sur un cycle de 400 ans. Or 400 n'est pas multiple de 7, donc il est impossible que les 400 premiers janviers se répartissent à parts égales entre lundi, mardi, etc. Pour avoir plus de précisions sur les fréquences, le plus simple est d'utiliser un tableur : la colonne

A contient les numéros des années de 1 à 400 ; en B1 on a entré la traduction de la formule 1 ci-dessus : $=A1+ENT((A1-1)/4)-ENT((A1-1)/100)+ENT((A1-1)/400)$; en C1 on ramène ce nombre à sa classe modulo 7 : $=B1-7*ENT(B1/7)$;

en D1 on traduit en clair les noms des jours :

$=SI(C1=0;"dim";SI(C1=1;"lun";SI(C1=2;"mar";SI(C1=3;"mer";SI(C1=4;"jeu";SI(C1=5;"ven";"sam"))))))$.

Et on recopie jusqu'à la ligne 400.

En G2 on dénombre les dimanches : $=NB.SI(D1:D400;"dim")$, et en H2 on calcule la fréquence : $=G2/400$; on procède de même pour les lundis en G3 et H3, etc ; voici ce qu'on obtient :

Dimanches :	58	0,145
Lundis :	56	0,14
Mardis :	58	0,145
Mercredis :	57	0,1425
Jeudis :	57	0,1425
Vendredis :	58	0,145
Samedis :	56	0,14

Pour avoir les fréquences du k -ième jour de l'année, il suffit d'ajouter $k - 1$ dans la colonne B ; par exemple, cherchons si le 13 des mois tombe un vendredi plus ou moins qu'une fois sur sept :

pour le 13 janvier (13ème jour de l'année) on obtient :

Dimanches :	58	0,145
Lundis :	57	0,1425
Mardis :	57	0,1425
Mercredis :	58	0,145
Jeudis :	56	0,14
Vendredis :	58	0,145
Samedis :	56	0,14

On obtiendrait de même la répartition des 13 février (44ème jour de l'année) ; à partir de mars, c'est plus compliqué car selon que l'année est bissextile ou non, le rang, dans l'année, du 13 mars n'est pas le même ; d'où un **sujet d'exercice** :

On tire au hasard une année n entre 1 et 400.

a) Si l'année est bissextile, quel est le rang, dans l'année, du 13 mars ? Même question si n n'est pas bissextile.

b) Écrire un algorithme donnant la probabilité pour que le 13 mars soit un vendredi.

c) Traduire cet algorithme sur tableur, ou avec un logiciel de programmation. Conclure.

d) Modifier l'algorithme pour qu'il demande de choisir un mois, puis qu'il donne la probabilité pour que le 13 de ce mois soit un vendredi.

e) Modifier le programme informatique pour l'adapter à d) ; noter les résultats pour les 12 mois.

f) Un mois étant tiré au hasard (dans les années 1 à 400), calculer la probabilité pour que le 13 de ce mois tombe un vendredi.

3. Algorithmique

3.1 Construction d'algorithmes

a) Calendrier perpétuel

Les paragraphes 2.1 à 2.4 nous permettent de construire un algorithme général ayant pour seule entrée le numéro de l'année, pour sortie les douze tableaux mettant en correspondance chaque jour du mois avec un jour de la semaine (*commentaires entre parenthèses et en italique*) :

- Entrer n (*numéro de l'année*)
- Définir une variable b à valeur : Si [$(n$ divisible par 4 ET n non divisible par 100) OU (n divisible par 400)], alors $b := 1$; sinon $b := 0$;
- Définir une variable $I(n)$ (*Premier jour de l'année, sous forme numérique*) :

$$I(n) = n + E\left(\frac{n-1}{4}\right) - E\left(\frac{n-1}{100}\right) + E\left(\frac{n-1}{400}\right) - 7 \times E\left[\frac{n + E\left(\frac{n-1}{4}\right) - E\left(\frac{n-1}{100}\right) + E\left(\frac{n-1}{400}\right)}{7}\right]$$

- Définir une liste A par : $A(1) := I(n)$; pour j de 2 jusque $365 + b$, $A(j) := A(j-1) + 1 \pmod{7}$ (*jours de la semaine sous forme numérique*)
- Définir une liste Année par : pour j de 1 jusque $365 + b$,
si $A(j) = 0$, alors Année(j) := "DIM" ;
si $A(j) = 1$, alors Année(j) := "LUN" ;
si $A(j) = 2$ alors Année(j) := "MAR" ;
etc. (*traduction « en clair » des jours de la semaine*)
- Définir 12 listes par :
pour k de 1 jusque 31, JANVIER(k) = (k , Année(k)) ;
pour k de 1 jusque $28+b$, FEVRIER(k) = (k , Année($31 + k$))
pour k de 1 jusque 31, MARS(k) = (k , Année($31 + 28 + b + k$))
etc. (*listes des couples associant le jour du mois au jour de la semaine*)
Afficher JANVIER, FEVRIER, etc.

b) Exercice de probabilités de 2.5

La réponse à la question a) est 73 si n est bissextile, 72 sinon ; on peut la représenter par $72 + b(n)$, avec $b(n) = 1$ si n est bissextile, 0 sinon.

Pour chercher les vendredis 13 avril, 13 mai, etc, il suffira de remplacer 72 (rang du 13 mars dans une année non bissextile) par, respectivement, 103, 133, 164, 194, 225, 256, 286, 317, 347. D'où la construction de l'algorithme :

- Définir une variable c ; $c := 0$ (c est le « compteur de vendredis 13 pour le mois considéré » ; on l'initialise à 0)
- Définir une variable mois, une variable rang
- Entrer la valeur de mois

- Pour n de 1 à 400 faire
 Calculer $I(n)$ (même formule que dans 3.1a)
 Calculer $b(n)$ (même formule que pour b dans 3.1a)
- Si mois = janvier, rang := 13 ; si mois = février, rang := 44 ; si mois = mars, rang := $72 + b$; etc.
 Fin Si
- Calculer $I(n) + rang - 1$
- Si $I(n) + rang - 1 \equiv 5 [7]$ alors $c := c + 1$ (le compteur augmente de 1 si le jour est un vendredi)
 Fin Si
 Fin pour
- Afficher c (nombre de vendredis 13 au mois considéré, en 400 ans)

3.2 Mise en œuvre sur un tableur

a) Calendrier universel

Je l’ai réalisée sur le tableur de GeoGebra ; elle est aisément transposable sur les autres tableurs courants, moyennant quelques modifications de détail : par exemple la partie entière de x se note floor(x) sur GeoGebra, Ent(x) sur OpenOffice ; GeoGebra dispose de la commande EstEntier, absente d’OpenOffice, mais ce dernier offre EstBissextile ; la conjonction se note ET sur OpenOffice, \wedge sur GeoGebra. Voici une photo d’écran :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	CALENDRIER PERPETUEL																		
2	ANNEE: n° 2017																		
3	Année non bissextile																		
4	JANVIER			FEBVIER			MARS			AVRIL			MAI			JUIN			
4		1	DIM	1	MER	1	MER	1	MER	1	SAM	1	SAM	1	LUN	1	JEU	1	JEU
5		2	LUN	2	JEU	2	JEU	2	JEU	2	DIM	2	MAR	2	MAR	2	VEN	2	VEN
6		3	MAR	3	VEN	3	VEN	3	VEN	3	LUN	3	MER	3	MER	3	SAM	3	SAM
7		4	MER	4	SAM	4	SAM	4	SAM	4	MAR	4	JEU	4	JEU	4	DIM	4	DIM
8		5	JEU	5	DIM	5	DIM	5	DIM	5	MER	5	VEN	5	VEN	5	LUN	5	LUN
9		6	VEN	6	LUN	6	LUN	6	LUN	6	JEU	6	SAM	6	SAM	6	MAR	6	MAR
10		7	SAM	7	MAR	7	MAR	7	MAR	7	VEN	7	DIM	7	DIM	7	JEU	7	JEU
11		8	DIM	8	MER	8	MER	8	MER	8	SAM	8	LUN	8	LUN	8	MER	8	MER
12		9	LUN	9	JEU	9	JEU	9	JEU	9	DIM	9	MAR	9	MAR	9	VEN	9	VEN
13		10	MAR	10	VEN	10	VEN	10	VEN	10	LUN	10	MER	10	MER	10	SAM	10	SAM
14		11	MER	11	SAM	11	SAM	11	SAM	11	MAR	11	JEU	11	JEU	11	DIM	11	DIM
15		12	JEU	12	DIM	12	DIM	12	DIM	12	MER	12	VEN	12	VEN	12	LUN	12	LUN
16		13	VEN	13	LUN	13	LUN	13	LUN	13	JEU	13	SAM	13	SAM	13	MAR	13	MAR
17		14	SAM	14	MAR	14	MAR	14	MAR	14	VEN	14	DIM	14	DIM	14	JEU	14	JEU
18		15	DIM	15	MER	15	MER	15	MER	15	SAM	15	LUN	15	LUN	15	MER	15	MER
19		16	LUN	16	JEU	16	JEU	16	JEU	16	DIM	16	MAR	16	MAR	16	VEN	16	VEN
20		17	MAR	17	VEN	17	VEN	17	VEN	17	LUN	17	MER	17	MER	17	SAM	17	SAM
21		18	MER	18	SAM	18	SAM	18	SAM	18	MAR	18	JEU	18	JEU	18	DIM	18	DIM
22		19	JEU	19	DIM	19	DIM	19	DIM	19	MER	19	VEN	19	VEN	19	LUN	19	LUN
23		20	VEN	20	LUN	20	LUN	20	LUN	20	JEU	20	SAM	20	SAM	20	MAR	20	MAR
24		21	SAM	21	MAR	21	MAR	21	MAR	21	VEN	21	DIM	21	DIM	21	JEU	21	JEU
25		22	DIM	22	MER	22	MER	22	MER	22	SAM	22	LUN	22	LUN	22	MER	22	MER
26		23	LUN	23	JEU	23	JEU	23	JEU	23	DIM	23	MAR	23	MAR	23	VEN	23	VEN
27		24	MAR	24	VEN	24	VEN	24	VEN	24	LUN	24	MER	24	MER	24	SAM	24	SAM
28		25	MER	25	SAM	25	SAM	25	SAM	25	MAR	25	JEU	25	JEU	25	DIM	25	DIM
29		26	JEU	26	DIM	26	DIM	26	DIM	26	MER	26	VEN	26	VEN	26	LUN	26	LUN
30		27	VEN	27	LUN	27	LUN	27	LUN	27	JEU	27	SAM	27	SAM	27	MAR	27	MAR

On entre l’année en D1 ; par commodité j’ai défini un nombre $n = D1$; puis un nombre $b = Si[EstEntier[n/4] \wedge (\neg EstEntier[n/100]) \vee EstEntier[n/400], 1, 0]$. A3 contient la formule : $Si[b = 1, "Année bissextile", "Année non bissextile"]$. Le nombre a donne le numéro du jour du 1er janvier :

$$a = n + \text{floor}((n - 1)/4) - \text{floor}((n - 1)/100) + \text{floor}((n - 1)/400)$$

Le nombre a_1 indique la classe de a modulo 7 : $a_1 = a - 7 \text{ floor}(a/7)$

La colonne V contient les numéros des jours de l'année (de 1 à 365 ou 366, selon que $b = 0$ ou 1) ; la colonne W leur fait correspondre les jours de la semaine sous forme numérique : $W1 = a_1$, puis $W2 = W1 + 1 - 7 \text{ floor}((W1 + 1)/7)$, que l'on recopie en tirant jusqu'en W365 (idem en W366 si $b = 1$) ; la colonne X traduit ces nombres en clair ; $X1 = \text{Si}[W1 = 0, \text{"DIM"}, \text{Si}[W1 = 1, \text{"LUN"}, \text{Si}[W1 = 2, \text{"MAR"}, \text{Si}[W1 = 3, \text{"MER"}, \text{Si}[W1 = 4, \text{"JEU"}, \text{Si}[W1 = 5, \text{"VEN"}, \text{Si}[W1 = 6, \text{"SAM"}, \text{" "}]]]]]]]$ (Ces trois colonnes ont été volontairement placées hors de la zone habituellement visible, car elles ne servent que d'intermédiaires).

Enfin les numéros des jours de janvier sont placés en C4-C34, et les jours correspondants en colonne D, par la formule $D4 = X1$, que l'on recopie ; de même pour février : $G4 = X32$, pour mars : $J4 = \text{Si}[b = 1, X61, X60]$; etc. Le cas particulier du 29 février a été traité en tapant en F32 : $\text{Si}[b = 1, 29, \text{" "}]$, et en G32 : $\text{Si}[b = 1, X60, \text{" "}]$. (Les six derniers mois de l'année sont placés sous les six premiers).

b) Les vendredis 13

Histoire de varier un peu, j'ai utilisé OpenOffice.

Les numéros d'année sont en colonne A (A6 à A405), les $b(n)$ en colonne B ($B6 = \text{SI}(\text{ET}(A6 - 4 * \text{ENT}(A6/4)) = 0 ; \text{OU}(\text{NON}(A6 - 100 * \text{ENT}(A6/100)) = 0) ; A6 - 400 * \text{ENT}(A6/400) = 0) ; 1 ; 0$) ; on entre le mois considéré en C3 ; dans la colonne C on trouve le rang, dans l'année, du 13 de ce mois :

$C6 = \text{SI}(\$C\$3 = \text{"janvier"} ; 13 ; \text{SI}(\$C\$3 = \text{"février"} ; 44 ; \text{SI}(\$C\$3 = \text{"mars"} ; 72 + B6$,

etc. La colonne D donne le jour de la semaine, ramené dans $\{0, \dots, 6\}$ dans la colonne E ; $G5 = C3$; en G8 on dénombre (NB.SI) les occurrences de "5" dans la colonne E :

Comptage des vendredis 13

Mois : janvier					Le nombre de Vendredis 13 janvier en 400 ans est :
Année	bissex	Rang ds année	Jour semaine	Modulo 7	
1	0	13	13	6	58
2	0	13	14	0	
3	0	13	15	1	
4	1	13	16	2	
5	0	13	18	4	

En totalisant les valeurs trouvées pour chaque mois, on trouve 688 vendredis 13 en 400 ans, soit une fréquence de 0,14333... , légèrement supérieure à 1/7.

3.3 Mise en œuvre avec un logiciel de programmation

La lecture de *Initiation à l'algorithmique et à la programmation pour le lycée*, par Luc Ponsonnet (voir la rubrique *Matériaux pour une documentation*, BV n° 495) m'a initié à la programmation avec, d'une part le logiciel Algobox, gratuit, et très pédagogique, d'autre part avec Xcas, également gratuit, plus puissant mais à la syntaxe redoutable.

a) Calendrier perpétuel

Les suites d'Algobox ne peuvent contenir que des nombres, et non des chaînes de caractères comme LUN, MAR, ... Je n'ai pas su contourner cet obstacle, et c'est

avec Xcas que, après beaucoup de transpiration et de consultations de l'ouvrage cité, j'ai réalisé le programme qu'on trouvera en annexe 1 (sur le site de l'APMEP), qui fonctionne correctement.

Même si la commande $irem(a,b)$ (reste de la division de a par b) est bien pratique pour les calculs modulo 7, c'est long et compliqué ; les risques d'erreur sont innombrables, par exemple du fait que les termes d'une liste à x éléments sont numérotés de 0 à $x-1$; cette expérience conforte mon opinion que l'usage de Xcas avec les élèves n'est envisageable que pour un enseignant qui en a une grande pratique. De plus la présentation des résultats n'est pas très attrayante ; voici par exemple un extrait de ce que l'on obtient pour 1789 (ce qui permettra aux élèves d'épater leur professeur d'histoire en lui disant que la Bastille a été prise un mardi !) :

Année non bissextile

JUIN:[1,"LUN ",2,"MAR ",3,"MER ",4,"JEU ",5,"VEN ",6,"SAM ",7,"DIM ",8,"LUN ",9,"MAR ",10,"MER ",11,"JEU ",12,"VEN ",13,"SAM ",14,"DIM ",15,"LUN ",16,"MAR ",17,"MER ",18,"JEU ",19,"VEN ",20,"SAM ",21,"DIM ",22,"LUN ",23,"MAR ",24,"MER ",25,"JEU ",26,"VEN ",27,"SAM ",28,"DIM ",29,"LUN ",30,"MAR ",31,"MER "]

JUILLET:[1,"MER ",2,"JEU ",3,"VEN ",4,"SAM ",5,"DIM ",6,"LUN ",7,"MAR ",8,"MER ",9,"JEU ",10,"VEN ",11,"SAM ",12,"DIM ",13,"LUN ",14,"MAR ",15,"MER ",16,"JEU ",17,"VEN ",18,"SAM ",19,"DIM ",20,"LUN ",21,"MAR ",22,"MER ",23,"JEU ",24,"VEN ",25,"SAM ",26,"DIM ",27,"LUN ",28,"MAR ",29,"MER ",30,"JEU ",31,"VEN "]
 ",11,"VEN ",12,"SAM ",13,"DIM ",14,"LUN ",15,"MAR ",16,"MER ",17,"JEU ",18,"VEN ",19,"SAM ",20,"DIM ",21,"LUN ",22,"MAR ",23,"MER ",24,"JEU ",25,"VEN ",26,"SAM ",27,"DIM ",28,"LUN ",29,"MAR ",30,"MER ",31,"JEU "]

b) Les vendredis 13

Ici rien ne s'oppose à l'utilisation d'Algobox ; voir le programme en annexe 2, sur le site ; il confirme les résultats obtenus sur tableur.

Les quatre fichiers : Calendrier perpétuel GeoGebra, Calendrier perpétuel Xcas, Vendredis 13 OpenOffice, Vendredis 13 Algobox, seront téléchargeables sur le site.

4. Prolongements possibles

4.1 Le calendrier julien

En entrant 1583 dans l'un des fichiers GeoGebra ou Xcas ci-dessus, on découvre facilement que le 31 décembre 1582 était un vendredi ; le lecteur reconstituera alors facilement, « à la main », le calendrier très particulier de cette année où le lendemain du 4 octobre fut le 15 octobre ; puis il pourra réaliser, pour les années 0 à 1581, un fichier analogue mais un peu plus simple, puisque toutes les années à millésime divisible par 4 sont bissextiles.

4.2 Autres renseignements

Un calendrier n'indique pas seulement les jours de la semaine, mais aussi les fêtes chrétiennes mobiles (Pâques, Pentecôte, ...) et aussi parfois celles d'autres religions ou traditions : début et fin du Ramadan, Pâque juive, Nouvel An chinois, ... Ces dates sont le plus souvent basées sur les phases de la Lune, qui, d'ailleurs, sont aussi mentionnées sur bien des calendriers. Un travail du genre TPE pourrait comporter une enquête sur la durée précise de la lunaison, et sur les règles qui fixent les événements cités, puis la construction d'un algorithme donnant les dates des Nouvelles lunes et celles des dits événements.

De même on pourrait envisager d'établir une correspondance entre le calendrier grégorien et le calendrier révolutionnaire, pour les années où ce dernier a été en vigueur.

Les réponses à la plupart de ces questions sont dans le livre de Jean Lefort (voir 4.5)

4.3 Amélioration de la présentation

Je présume qu'il existe des logiciels capables de reprendre les réponses de GeoGebra ou Xcas et de leur donner une forme plus aisément lisible (mise en page, couleurs, etc.) ; je laisse ceci aux spécialistes (voir site cité ci-dessous).

4.4 Sur le web

On trouve pléthore de sites qui donnent automatiquement le jour de la semaine selon la date ; par exemple : http://www.ephemeride.com/calendrier/jour_semaine/80/quel-jour-de-la-semaine-tombe-une-date.html?, ou <http://actu63.free.fr/perpetuel.htm>, ou encore <http://www.ylsen.net/jeux/ylysjeu12.htm>

Une mention spéciale pour <http://www.jmberthier.com/fr/calend.html>, où on peut télécharger gratuitement un logiciel qui, pour une année entre -3999 et 3999, affiche, sous une présentation esthétique et conviviale, les dates, en années juliennes, grégoriennes, et républicaines, les jours fériés légaux (fixes ou liés à Pâques) pour un pays au choix, les phases lunaires, ... Ni ce site ni les précédents n'indiquent l'algorithme sur lequel ils reposent.

Wikipedia , à l'article « Calendrier », en dénombre pas moins de 98 types, du calendrier akan au calendrier zoroastrien, en passant par le calendrier pataphysique ; à « calendrier perpétuel » est présenté le calendrier Moret, méthode avec 3 tableaux pour établir « à la main » la correspondance date/jour.

4.5 Éléments de bibliographie

Un ouvrage de référence est incontestablement *La saga des calendriers ou le frisson millénaire*, par Jean Lefort (Belin/Pour la science, 1998). Alliant érudition historique et mathématique avec un style limpide et allègre, l'auteur y rassemble quasiment tout sur les calendriers des diverses civilisations, et de substantielles annexes astronomique, mathématique, informatique. On y découvre entre autres le calendrier de Joseph-Juste Scaliger (1540-1609), basé sur une simple numérotation des jours à partir d'une origine lointaine ; Jean Lefort utilise systématiquement cet intermédiaire pour établir des algorithmes de passage d'un calendrier à l'autre, de calcul de la date

de Pâques, etc.

Sur Publmaths, le mot-clé « Calendrier » renvoie à 98 fiches ; je me contenterai de citer, outre l'ouvrage ci-dessus, le *Que sais-je ?* de Paul Couderc intitulé *Le calendrier* (PUF 1961), et les articles publiés par l'APMEP depuis le début du 21^{ème} siècle :

- Plot n° 21 : 08 année bissextile (Henry Plane).
- BV 434 : Pour une revalorisation de l'échelle (Guy de Saint-Aubin).
- BV 437 : Sources arabes de l'astronomie calendaire et de l'art analytique de l'Occident au XVI^{ème} siècle (Jacques Borowczyk).
- BV 443 : Temps et périodes (Jean-Claude Carréga).
- BV 477 : consacré aux Journées nationales de l'APMEP à Besançon (2007), dont le thème était « Le temps des mathématiques, les mathématiques dans leur temps » ; le calendrier intervient dans la conférence de Jean Lefort : Structures des calendriers – Unité et diversité ; mais aussi dans au moins deux comptes-rendus d'ateliers : Concevoir et fabriquer un calendrier perpétuel (Françoise Magnan) ; Fractions et calendriers à partir de l'Introduction aux Phénomènes de Géminos (François Puel).
- BV 478 : Numération et calendrier en sixième – Travail commun entre un professeur de collège et un post-bac (Catherine Winisdoerffer et Jean Lefort).

Conclusion.

Le thème du calendrier apparaît d'une certaine richesse sur les plans mathématique et algorithmique, permettant au niveau lycée aussi bien des exercices simples et courts (détermination des années bissextiles) que des travaux plus évolués (réalisation du calendrier perpétuel), éventuellement avec recherche documentaire et interdisciplinarité mathématiques/histoire, et introduction de notions d'astronomie.