

## Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART  
13, rue des Garennes  
63 800 Cournon d'Auvergne

ou

hochartmax@yahoo.fr

### Énoncés des nouveaux problèmes

#### Problème 497 - 1 (Fernand Canonic)

Caractériser (par exemple par leurs valuations  $p$ -adiques) les entiers pouvant s'écrire  $2a^2 + 3b^2$  avec  $a, b \in \mathbb{N}$ .

#### Problème 497 - 2 (Pascale De Jonghe)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe et  $R$  un réel,  $R > 1$ . On suppose que la suite  $(Ru_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l \in \mathbb{C}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Étudier la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

#### Problème 497 - 3 (Georges Lion)

Quel est le lieu géométrique des points  $M$  intérieurs à un parallélogramme  $ABCD$  et tels que les angles  $AMB$  et  $DMC$  soient supplémentaires ?

### Solutions des problèmes antérieurs

#### Problème 489-2 (Question de Fernand Canonic)

Soit  $n$  un entier strictement positif. Pour  $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{N}^n$ , on note

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = (|u_2 - u_1|, |u_3 - u_2|, \dots, |u_n - u_{n-1}|, |u_1 - u_n|).$$

Pour quelles valeurs de  $n$  une des itérées de  $\varphi$  est l'application nulle ?

**Commentaires** – L'énoncé est maladroit (*mea culpa*). Il s'agit de savoir si pour tout  $n$ -uplet  $u = (u_1, \dots, u_n)$  de  $\mathbb{N}^n$ , il existe un entier  $k$  tel que  $\varphi^k(u) = 0$ . Contrairement à ce que peut laisser entendre l'énoncé, l'entier  $k$  dépend de  $u$ . Par la suite, on qualifiera de « localement nilpotente » une application  $\varphi : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}^n$  vérifiant la propriété suivante :

pour tout  $u \in \mathbb{N}^n$ , il existe un entier  $k$  (dépendant de  $u$ ) tel que  $\varphi^k(u) = 0$ .

**Solution de Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques)**

On suppose  $n \geq 2$  (le cas  $n = 1$  n'ayant pas grand sens). On va montrer que les valeurs de  $n$  cherchées sont exactement les puissances de 2. À l'application  $\varphi : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}^n$ , on associe sa réduction modulo 2 :

$$\bar{\varphi} : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n .$$

Puisque pour  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,

$$|a - b| \equiv a + b \pmod{2},$$

l'application  $\bar{\varphi}$  est donnée par

$$\bar{\varphi} : \begin{cases} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \\ (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n) \mapsto (\bar{u}_1 + \bar{u}_2, \bar{u}_2 + \bar{u}_3, \dots, \bar{u}_n + \bar{u}_1) . \end{cases}$$

On commence par montrer que  $\varphi$  est localement nilpotente si et seulement si  $\bar{\varphi}$  l'est<sup>(1)</sup>. Le sens direct est évident : soit  $\bar{u}$  un vecteur de  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$  de représentant  $u \in \mathbb{N}^n$  et soit  $k$  un entier tel que  $\varphi^k(u) = 0$ . Alors  $\bar{\varphi}^k(\bar{u}) = \overline{\varphi^k(u)} = 0$ .

Réciproquement, on suppose que  $\bar{\varphi}$  est nilpotente. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\bar{\varphi}^k = 0$ . On considère un  $n$ -uplet  $u = (u_1, \dots, u_n)$  de  $\mathbb{N}^n$ . Alors  $\bar{\varphi}^k(\bar{u}) = 0$ . Cela signifie que toutes les composantes du  $n$ -uplet  $\varphi(u)$  sont divisibles par 2. En itérant ce phénomène, on voit que pour tout entier  $m$ , le  $n$ -uplet  $\varphi^{mk}(u)$  possède des composantes toutes divisibles par  $2^m$ . Mais  $\varphi$  vérifie la propriété suivante :

$$\max(\varphi(u)) \leq \max(u).$$

En notant  $M = \max(u)$  et en choisissant l'entier  $m$  tel que  $2^m > M$ , les composantes du  $n$ -uplet  $\varphi^{mk}(u)$  sont inférieures ou égales à  $M$  mais sont divisibles par  $2^m > M$ , donc sont nulles.

On en vient au problème, en étudiant d'abord le cas où  $n$  est impair. On montre que  $\bar{\varphi}$  n'est pas (localement) nilpotente. Le  $n$ -uplet  $(\bar{0}, \dots, \bar{0})$  ne peut avoir comme antécédent par  $\bar{\varphi}$  que  $(\bar{0}, \dots, \bar{0})$  ou  $(\bar{1}, \dots, \bar{1})$ . En effet, la condition

$$\bar{\varphi}(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n) = (\bar{0}, \dots, \bar{0})$$

signifie que

$$\bar{u}_1 + \bar{u}_2 = \bar{u}_2 + \bar{u}_3 = \dots = \bar{u}_n + \bar{u}_1 = \bar{0},$$

soit encore

(1) Pour l'application  $\bar{\varphi}$ , linéaire en dimension finie, « localement nilpotente » revient à « nilpotente » comme on le voit en considérant le ppem des indices de nilpotence des vecteurs d'une base.

$$\overline{u_1} - \overline{u_2} = \overline{u_2} - \overline{u_3} = \dots = \overline{u_n} - \overline{u_1} = \overline{0},$$

donc tous les  $\overline{u_k}$  sont égaux. Mais  $(\overline{1}, \dots, \overline{1})$  n'a aucun antécédent par  $\overline{\varphi}$  puisque un tel antécédent devrait présenter une alternance de 0 et de 1, mais avec des extrémités distinctes, ce qui contredit l'imparité de  $n$ .

On montre maintenant que si  $\overline{\varphi}$  n'est pas nilpotente pour un entier  $n$ , il en est de même pour l'entier  $2n$ , ce qui écarte le cas où  $n$  n'est pas une puissance de 2. Soit  $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_n})$  un  $n$ -uplet dont toutes les itérées sont non nulles. Alors il en est de même du  $2n$ -uplet  $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_n}, \overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_n})$ , car si  $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_n})$  se transforme en  $(\overline{u'_1}, \overline{u'_2}, \dots, \overline{u'_n})$ , alors  $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_n}, \overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_n})$  se transforme en  $(\overline{u'_1}, \overline{u'_2}, \dots, \overline{u'_n}, \overline{u'_1}, \overline{u'_2}, \dots, \overline{u'_n})$ .

Reste le cas où  $n$  est une puissance de 2. Soit donc  $n = 2^m$  avec  $m \in \mathbb{N}^*$ . On montre que  $\overline{\varphi}^n$  est l'application nulle. Soit  $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_n}) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ . Alors

$$\overline{\varphi}(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_n}) = (\overline{u_1} + \overline{u_2}, \overline{u_2} + \overline{u_3}, \dots, \overline{u_n} + \overline{u_1}),$$

puis

$$\overline{\varphi}^2(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_n}) = (\overline{u_1} + \overline{u_3}, \overline{u_2} + \overline{u_4}, \dots, \overline{u_n} + \overline{u_2}),$$

et plus généralement, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\overline{\varphi}^{2^k}(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_n}) = (\overline{u_1} + \overline{u_{1+2^k}}, \overline{u_2} + \overline{u_{2+2^k}}, \dots, \overline{u_n} + \overline{u_{n+2^k}}),$$

chaque indice devant être ramené, modulo  $n$ , dans  $[[1, n]]$ . En prenant  $k = m$ , on obtient bien  $\overline{\varphi}^n = 0$ .

**Commentaires** – On peut voir matriciellement ce dernier point (à savoir la nilpotence de  $\overline{\varphi}$  lorsque  $n = 2^m$ ). On note  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique du  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espace vectoriel  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ . La matrice de  $\overline{\varphi}$  dans la base  $\underline{e}$  est  $I_n + J$ , avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Or  $J$  est la matrice dans la base  $\underline{e}$  de l'application envoyant chaque  $e_i$  sur  $e_{i+1} \bmod n$ . Donc pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $J^k$  est la matrice dans la base  $\underline{e}$  de l'application envoyant chaque  $e_i$  sur  $e_{i+k} \bmod n$ . En particulier,  $J^n = I$ . Or, dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ,

$$(I + J)^2 = I + J^2,$$

et par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$(I + J)^{2^k} = I + J^{2^k}.$$

En particulier, puisque  $n = 2^m$ ,

$$(I + J)^n = I + J^n = 0.$$

### Problème 489-4 (Question de Michel Lafond)

Le système

$$a + b + c = 6 \text{ et } abc = 9$$

a-t-il des solutions dans  $\mathbb{R}_+$  ? Dans  $\mathbb{Q}_+$  ? Dans  $\mathbb{R}$  ? Dans  $\mathbb{Q}$  ?

**Solutions de Raymond Heitz (Ploufragan), Michel Lafond (Dijon), Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques).**

Dans tout ce qui suite, on note (S) le système à résoudre :

$$a + b + c = 6 \text{ et } abc = 9.$$

Dans la recherche des solutions réelles, **Raymond Heitz** passe par la résolution des équations de degré 3. Il pose

$$\begin{cases} a = 2 + u \\ b = 2 + v \\ c = 2 + w \end{cases}$$

Le système (S) devient

$$\begin{cases} u + v + w = 0 \\ uv + uw + vw = t \\ uvw = 1 - 2t \end{cases}$$

où  $t$  est un paramètre réel. Les réels  $u, v, w$  sont donc les racines du polynôme

$$P_t(X) = X^3 + tX + 2t - 1.$$

Le système (S) admet trois solutions réelles (non nécessairement distinctes) si et seulement si le polynôme  $P_t$  a trois racines réelles, c'est-à-dire si et seulement si son discriminant  $\Delta_t$  est négatif ou nul. Or

$$\Delta_t = 4t^3 + 27(2t - 1)^2 = 4t^3 + 108t^2 - 108t + 27.$$

Ce polynôme  $\Delta_t$  admet une seule racine réelle, à savoir

$$t_0 = -9 - 6\sqrt[3]{4} - \frac{15}{2}\sqrt[3]{2} \approx -27,9738149.$$

Ainsi, pour  $t < t_0$ , le discriminant  $\Delta_t$  est strictement négatif et le polynôme  $P_t$  admet trois solutions réelles distinctes, ce qui donne par permutation six triplets  $(u, v, w)$  donc six solutions pour (S). Pour  $t = t_0$ , le polynôme  $P_t$  admet deux solutions réelles

distinctes (dont une double), ce qui donne trois solutions pour (S). Enfin, si  $t > t_0$ , le système (S) n'admet aucune solution dans  $\mathbb{R}^3$ . En conclusion, le système (S) admet une infinité de solutions dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Raymond Heitz** interprète la recherche de solutions strictement positives ainsi : il existerait un parallélépipède rectangle de longueur  $L$ , de largeur  $l$  et de hauteur  $h$  pour lequel le quart de périmètre  $(L + l + h)$  vaudrait 6 et le volume  $L \times l \times h$  serait égal à 9. Il dit qu'intuitivement, en gardant le volume constant égal à 9, le minimum du quart de périmètre serait atteint pour le cube. Or pour le cube,

$$L + l + h = 3\sqrt[3]{9} > 6,$$

ce qui écarte la possibilité de solutions dans  $\mathbb{R}_+$ . Ceci peut être mis en place rigoureusement en utilisant l'inégalité arithmético-géométrique, comme on le voit dans un instant dans la solution proposée par **Michel Lafond**.

Avant cela, voici la solution de **Pierre Renfer**, qui préfère les polynômes de degré 2. Il pose

$$\begin{cases} S = a + b = 6 - c \\ P = ab = \frac{9}{c} \end{cases} \quad (1)$$

ce qui est légitime puisque  $c \neq 0$ . Ainsi,

$$S = 6 - \frac{9}{P},$$

et les nombres  $a$  et  $b$  sont les racines de l'équation du second degré

$$X^2 - SX + P = 0,$$

dont le discriminant est

$$\Delta = \left(6 - \frac{9}{P}\right)^2 - 4P = \frac{4(3-P)^3 - 27}{P^2}.$$

Le problème posé possède des solutions réelles si et seulement si  $\Delta \geq 0$ , c'est-à-dire si et seulement si  $P$  est un réel non nul, inférieur ou égal à

$$P_0 = 3 \frac{\sqrt[3]{4} - 1}{\sqrt[3]{4}} \approx 1,110118425.$$

Pour chaque valeur non nulle de  $P \leq P_0$ , le système (S) admet pour solution

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \left( 6 - \frac{9}{P} + \frac{\sqrt{4(3-P^3)-27}}{P} \right) \\ b = \frac{1}{2} \left( 6 - \frac{9}{P} - \frac{\sqrt{4(3-P^3)-27}}{P} \right) \\ c = \frac{9}{P} \end{cases}$$

(et les triplets obtenus par permutation).

Pour que les solutions soient positives, il faut de plus que  $P$  et  $S$  soient strictement positifs, c'est-à-dire que  $P > \frac{3}{2}$ , ce qui est incompatible avec la condition  $P \leq P_0$ . Il n'existe donc pas de solutions positives.

Pour obtenir des solutions rationnelles, il faudrait que  $4(3 - P^3) - 27$  fût le carré d'un rationnel  $q$ . En posant

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{P}{3} \\ y = \frac{q}{9} \end{cases},$$

on est amené à trouver les solutions rationnelles de l'équation

$$4x^3 - 1 = 3y^2. \quad (2)$$

Sont solutions évidentes de cette équation les couples

$$(x,y) = (1,1) \text{ et } (x,y) = (1,-1).$$

Mais  $x = 1$  impose  $P = 0$ , ce qui est impossible. Il reste à voir si l'équation (2) possède d'autres solutions rationnelles. Si  $Z$  désigne un dénominateur commun positif des

rationnels  $x$  et  $y$ , ceux-ci peuvent s'écrire  $x = \frac{X}{Z}$  et  $y = \frac{Y}{Z}$  où  $X$  et  $Y$  sont des entiers.

L'équation (2) s'écrit

$$4X^3 - Z^3 = 3Y^2Z. \quad (3)$$

Par homogénéité, on peut se contenter de chercher les solutions primitives pour lesquelles  $\text{pgcd}(X,Y,Z) = 1$ , ce qui impose  $\text{pgcd}(Y,Z) = 1$ . L'équation (3) s'écrit encore

$$(2X)^3 = 2Z(Z^2 + 3Y^2),$$

ou

$$(2X)^3 = (Z + Y)^3 + (Z - Y)^3.$$

D'après le théorème de Fermat (classique pour l'exposant 3), l'un des trois cubes au moins est nul. Si  $X = 0$  alors  $Z = 0$ , ce qui est exclu. Si  $Z - Y = 0$ , alors  $Y = Z = 1$  et  $X = 1$ . Si  $Z + Y = 0$ , alors  $Z = 1 = -Y$  et  $X = 1$ . Donc l'équation (2) n'admet que les

solutions évidentes. On conclut qu'il n'existe pas de nombres rationnels de somme 6 et de produit 9.

**Pierre Renfer** termine sa lettre en rappelant que la démonstration du théorème de Fermat pour l'exposant 3 est élémentaire et utilise l'anneau euclidien  $\mathbb{Z}[j]$  où  $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ . À ce propos, il remarque que dans l'anneau  $\mathbb{Z}[j]$ , le problème possède une jolie solution :

$$3, 2 + j, 2 + j^2.$$

La dernière contribution est celle de **Michel Lafond**, auteur de ce problème. Dans  $\mathbb{R}$ , on obtient une infinité de solutions : en choisissant  $c < 0$  quelconque, on doit résoudre le système (1), ce qui aboutit à la résolution d'une équation du second degré de discriminant strictement positif.

Dans  $\mathbb{R}_+^*$ , l'inégalité arithmético-géométrique prouve qu'il n'y a pas de solution : pour  $a, b, c > 0$ ,

$$abc \leq \left( \frac{1}{3}(a+b+c) \right)^3,$$

ce qui donnerait ici  $9 < 8$ .

Dans  $\mathbb{Q}$ , en posant

$$\begin{cases} a = 3\alpha \\ b = 3\beta, \\ c = 3\gamma \end{cases}$$

le système devient

$$\alpha + \beta + \gamma = 2 \text{ et } \alpha\beta\gamma = \frac{1}{3}. \quad (4)$$

Soit  $s$  un dénominateur positif commun des fractions  $1 - \alpha, 1 - \beta, 1 - \gamma$ . Il existe donc  $A, B, C \in \mathbb{Z}$  tels que

$$1 - \alpha = \frac{A}{s}, \quad 1 - \beta = \frac{B}{s}, \quad 1 - \gamma = \frac{C}{s}.$$

La première équation du système (4) donne

$$\left(1 - \frac{A}{s}\right) + \left(1 - \frac{B}{s}\right) + \left(1 - \frac{C}{s}\right) = 2$$

soit

$$A + B + C = s. \quad (5)$$

La seconde équation du système (4) donne

$$\left(1 - \frac{A}{s}\right)\left(1 - \frac{B}{s}\right)\left(1 - \frac{C}{s}\right) = \frac{1}{3},$$

soit

$$3(s - A)(s - B)(s - C) = s^3. \quad (6)$$

Les équations (4) et (5), reportées dans l'équation ci-dessus, donnent

$$(A + B + C)^3 = 3(B + C)(A + C)(A + B),$$

soit, après un petit calcul,

$$A^3 + B^3 + C^3 = 0.$$

De nouveau, le théorème de Fermat pour l'exposant 3 impose  $ABC = 0$ . Si par exemple  $C = 0$ , alors  $\gamma = 1$  et (4) implique

$$\alpha + \beta = 1 \text{ et } \alpha\beta = \frac{1}{3},$$

qui n'a pas de solution pour cause de discriminant négatif. En conclusion, il n'y a pas de solution rationnelle.

Pour finir, **Michel Lafond** mentionne l'existence de solutions dans  $\mathbb{Z}[j]$  (les mêmes solutions que **Pierre Renfer**).