Exercices de-ci, de-là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par Mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

Jean Fromentin,
17 rue de la Roussille,
79000 NIORT

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial, une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Erratum : Dans la solution à l'exercice 493-3 donnée dans le BV n° 495, la formule trigono ... méritait la trique ! Il fallait bien entendu lire

$$2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b).$$

Exercices

Exercice 497-1 (Daniel Reisz – Auxerre) *à proposer à nos élèves*

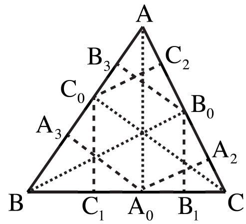
– Dans une feuille de papier on découpe un trou circulaire de 3cm de diamètre. Peut-on y faire passer une pièce de 4cm de diamètre ?

– Les équations $ax^2 + bx + c = 0$; $cx^2 + ax + b = 0$ et $bx^2 + cx + a = 0$ peuvent-elles avoir toutes les trois deux racines réelles?

– Pour un nombre réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière (le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x) et on note $\{x\}$ sa partie décimale ($\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$). Existe-t-il des réels x non nuls tels que $\lfloor x \rfloor \cdot \{x\} = x$?

Exercice 497-2 (Georges Lion – Wallis) *extrait du livre de Robin Hartshorne : Euclid and beyond*

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. A_0, B_0 et C_0 sont les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B et C. A_2 et A_3 sont les projetés orthogonaux de A_0 sur (AC) et (AB) ; B_1 et B_3 ceux de B_0 sur (BC) et (BA) ; C_1 et C_2 ceux de C_0 sur (CB) et (CA).

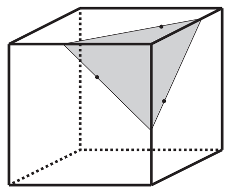


Démontrer que les six points A_2, A_3, B_1, B_3, C_2 et C_1 sont situés sur un même cercle.

On demande de préférence, une solution reposant exclusivement sur des propriétés des angles, des droites, des cercles et des quadrilatères inscriptibles, c'est-à-dire excluant tout recours aux proportions et aux triangles semblables.

Exercice 497-3 *pioché de-ci, de-là…*

En perspective cavalière on sait dessiner sur un cube la trace de sa section par un plan passant par trois points donnés, comme sur l'exemple ci-contre dans lequel les points ont été choisis sur les faces de dessus, de devant et de droite.



Indiquer une procédure permettant d'obtenir cette trace dans la réalité, c'est-à-dire sur un vrai cube ; ou sur la perspective mais à l'aide de tracés limités exclusivement aux faces.

Exercice 497-4 *pioché de-ci, de-là…*

Calculer $\mathrm{I} = \int_0^1 \left[\frac{1}{x} - \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) \right] dx$ (où E désigne la partie entière).

Solutions

Exercice 495-1 (Jean Gounon – Chardonnay)

ABC est un triangle non aplati. Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan du triangle tels que les aires des triangles MAB, MBC et MCA soient égales.

Solution de Raymond Heitz (Lavergne) *géométrie des configurations*

Appelons distingué un tel point M.
Soit PQR un triangle non aplati. Désignons par P′, Q′ et R′ les milieux des côtés [QR], [RP] et [PQ] ; par G le centre de gravité commun des triangles PQR et P′Q′R′ (P′Q′R′ est le triangle complémentaire de PQR et PQR est l'anti-complémentaire de P′Q′R′).
Alors les points P, Q, R et G sont distingués pour le triangle P′Q′R′.
Inversement, pour le triangle ABC, les points distingués sont le centre de gravité et les sommets du triangle anti-complémentaire.

La démonstration se réduit au simple examen d'une figure, avec la remarque suivante que l'ensemble des points M tels que aire MAB = aire MAC est formé de deux droites : la parallèle à (BC) menée par A et la médiane (AG), point A exclu.

Solution de Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques) *géométrie affine*

On sait que si M a pour coordonnées barycentriques (α,β,γ) dans le repère affine (A,B,C), alors les valeurs absolues de α, β et γ sont proportionnelles aux aires des triangles MBC, MCA, MAB.
On est donc ramené à chercher les points dont les coordonnées barycentriques sont égales en valeur absolue.
La solution la plus connue est l'isobarycentre G, de coordonnées barycentriques (1,1,1).
Mais on obtient aussi trois autres solutions :
Le point A_1 de coordonnées barycentriques (−1,1,1) ; le point B_1 de coordonnées barycentriques (1,−1,1) et le point C_1 de coordonnées barycentriques (1,1,−1).
(Le point A_1, par exemple, est le symétrique de A par rapport au milieu de [B,C])

Solution de Frédéric de Ligt (Montguyon) *transformation affine*

Soit A′B′C′ un triangle équilatéral contenu dans le même plan que celui du triangle ABC. Il existe alors une unique transformation affine f qui envoie A en A′, B en B′ et C en C′.
Si M est un point de ce plan tel que les aires des triangles MAB, MAC et MBC soient égales, en notant M′ l'image de M par f, alors, par conservation des rapports d'aires, les triangles M′A′B′, M′A′C′ et M'B'C' ont des aires égales.
Réciproquement, comme f est bijective et comme f^{-1} est aussi une transformation affine, si M′ est un point du plan pour lequel les aires de M′A′B′, M′A′C′ et M′B′C′ sont égales, alors M = f^{-1}(M′) est tel que les aires de MAB, MAC et MBC soint égales.
On va donc chercher tous les points M′ du plan pour lesquels M′A′B′, M′A′C′ et M′B′C′ ont des aires égales et en appliquant f^{-1} on obtiendra toutes les solutions relatives au triangle ABC.
Comme A′B′C′ est équilatéral, M′A′B′, M′A′C′ et M′B′C′ ont des aires égales si et seulement si M′ est situé à égale distance des droites (AB), (AC) et (BC). M peut ainsi se situer aux intersections des trois couples de bissectrices (intérieures et extérieures) des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.
On obtient quatre points possibles : le centre de gravité G′ du triangle A′B′C′ et les quatrièmes sommets M'_1, M'_2 et M'_3 des losanges A′B′C′M'_1, A′C′B′M'_2 et B′A′C′M'_3. La conservation du parallélisme et du centre de gravité par la transformation affine f^{-1} donne comme ensemble (E) le centre de gravité G du triangle ABC et les quatrièmes sommets M_1, M_2 et M_3 des parallélogrammes ABCM_1, ACBM_2 et BACM_3.

Autres solutions : Maurice Bauval (Versailles), Jean-Claude Carréga (Lyon), François Duc ( ), Jean Gounon (Chardonnay), Pierre Lapôtre (Calais), Éric Trotoux (Caen).

Nota.

• Certaines de ces autres solutions relèvent de la géométrie analytique et utilisent les déterminants pour calculer les aires.

• Raymond Heitz m'a fait parvenir la proposition suivante trouvée dans un vieux livre de géométrie:

> *Pour un triangle ABC (non équilatéral), le centre de gravité, les sommets du triangle anti-complémentaire et les centres des cercles inscrit et exinscrits sont huit points d'une même hyperbole (équilatère) dont le centre (appelé point de Steiner) est situé sur le cercle circonscrit au triangle ABC.*

Remarque.

On pourrait se poser la question de déterminer les points M de l'espace qui vérifient la même propriété.

Exercice 495-2 (Raphaël Sinteff – Nancy) d'après le sujet de TP Bac S nº 30, juin 2008

Étudier la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n} + 1$ et u_1 réel.

Solution de Éric Trotoux (Caen)

Pour tout $n \geq 1$, on a $|u_{n+1}| \leq \left|\dfrac{u_n}{n} + 1\right| \leq \dfrac{|u_n|}{n} + 1$.

Donc pour tout $n \geq 2$, on a $|u_{n+1}| \leq \dfrac{|u_n|}{2} + 1$.

Définissons la suite v par $v_2 = |u_2|$ et la relation récurrente $v_{n+1} = \dfrac{1}{2} v_n + 1$.

Une récurrence facile permet d'établir que pour tout $n \geq 2$, on a $|u_n| \leq v_n$.

Comme $v_n - 2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2} (|u_2| - 2)$, il s'ensuit que $|u_n| \leq \max(2, |u_2|)$.

Donc pour tout $n \geq 2$, on a $|u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{|u_n|}{2} \leq \dfrac{\max(2, |u_2|)}{n}$.

On en conclut que la suite (u_n) converge vers 1.

Remarque. La relation de récurrence définissant (u_n) peut s'écrire aussi :

$u_{n+1}-1=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+1}\left[\dfrac{1}{n}+\dfrac{n+1}{n}(u_n-1)\right]$, ce qui entraîne $u_{n+1}-1=\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

En réinjectant cette information dans la relation de récurrence, on peut alors établir que :

$u_{n+1}-u_n=-\dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, ce qui établit que (u_n) décroît à partir d'un certain rang.

Solution de Frédéric de Ligt (Montguyon)

Soit la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n}+1$ et $a_1=0$.

On montre facilement par récurrence que :

d'une part $u_n=\dfrac{u_1}{(n-1)!}+a_n$ pour $n>0$ et d'autre part $0\leq a_n\leq 2$ pour $n>0$.

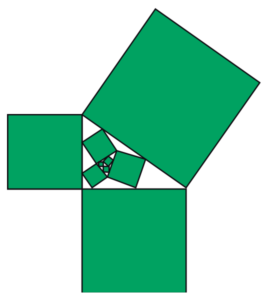
De cette seconde inégalité on déduit que $1\leq a_{n+1}\leq 1+\dfrac{2}{n}$ pour $n>0$.

Par application du théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=1$. Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_1}{(n-1)!}=0$,

on peut dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$.

Autres solutions : Jean-Claude Carréga (Lyon), Jean Gounon (Chardonnay), Raymond Heitz (Lavergne), Pierre Lapôtre (Calais), Giovanni Ranieri (Melun), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Raphaël Sinteff (Nancy), .

Exercice 495-3 pioché de-ci, de-là …



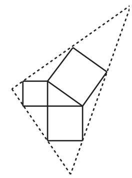
Étudier(1) cette figure dans laquelle les angles qui semblent être droits, le sont vraiment.

Solution de Michel Sarrouy (Mende)

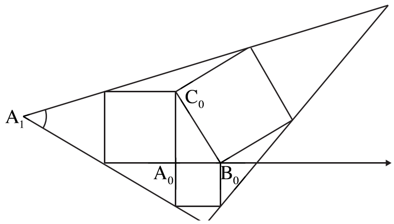
Jolie figure ! Configuration fractale qu'on a envie de poursuivre à l'infini…
Par quel bout la prendre ?

(1) rapports de longueurs, rapports d'aires, ...

Rien qu'en la regardant, on se dit qu'elle peut être singulièrement simplifiée pour n'en garder que la partie centrale :



Comme souvent, par paresse sans doute(2), j'ouvre GeoGebra et commence la construction en fixant le maximum de points (fichier APM_495_3a.ggb). Je décide ainsi de mettre A_0 à l'origine, de prendre pour C_0 le point de coordonnées (0 ; 1) et de laisser B_0 mobile sur la partie positive de l'axe des abscisses. Je fais afficher la valeur de l'angle en A_1 et déplace ensuite le point B_0 jusqu'à ce que cet angle mesure 90°. À ce moment-là, la lecture de l'abscisse de B_0 évoque suffisamment $\sqrt{2}$ pour se dire qu'on a trouvé.



... constructions, similitudes, suites de points ...

La suite est vraiment délectable ; malheureusement je ne peux,
L'écrire ici c'est regrettable ; mais la publier, je l'APM -e- peux !

Vous trouverez donc sur le site de l'association le texte de l'étude faite par Michel Sarrouy, accompagné de trois fichiers Geogebra. Je profite de cette tribune pour le remercier vivement de permettre, une fois de plus, un prolongement à la version papier de la rubrique.

Autres solutions : Raymond Heitz (Lavergne), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Éric Trotoux (Caen).

La solution proposée par Éric Trotoux est également disponible sur le site de l'APMEP.

Exercice 495-4 (XVIIIe olympiades mathématiques d'Italie (Mai 2002))

Prouver que si $5^n + 3^n + 1$ est premier, alors 12 divise n.

Solution de Pierre Lapôtre (Calais)

On va montrer la contraposée : si 12 ne divise pas n, alors $5^n + 3^n + 1$ n'est pas premier.
On pose $A = 5^n + 3^n + 1$ et $n = 12q + r$ avec $0 < r < 12$.

(2) NDLR : paresse toute relative puisque l'étude poussée que propose Michel Sarrouy en est un beau contre-exemple.

On conjecture que si r est congru à 1, 3, 5, 7, 9 ou 11 modulo 12, alors A est divisible par 3. Si r est congru à 2, 6 ou 10 modulo 12, alors A est divisible par 5. Enfin si r est congru à 4 ou 8 modulo 12, alors A est divisible par 7.

On a $5 \equiv 2 \pmod 3$, puis $5^2 \equiv 1 \pmod 3$. On en déduit $5^{2k+1} \equiv 2 \pmod 3$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis $5^{12q+r} \equiv 2 \pmod 3$ pour $r = 1, 3, 5, 7, 9, 11$.
D'où le premier résultat, $5^{12q+r} + 3^{12q+r} + 1 \equiv 0 \pmod 3$ pour $r = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ et pour $q \in \mathbb{N}$.

On a $3 \equiv 3 \pmod 5$, puis $3^2 \equiv -1 \pmod 5$ donc $3^{12} \equiv 1 \pmod 5$.
Ce qui donne $3^{12q+2} \equiv -1 \pmod 5$, pour $q \in \mathbb{N}$.
On a aussi $3^{10} \equiv -1 \pmod 5$, donc $3^{12q+10} \equiv -1 \pmod 5$, pour $q \in \mathbb{N}$.
De $3^6 \equiv -1 \pmod 5$ on déduit que $3^{12q+6} \equiv -1 \pmod 5$, pour $q \in \mathbb{N}$.
En conclusion, on a obtenu que $5^{12q+r} + 3^{12q+r} + 1 \equiv 0 \pmod 5$ pour $r = 2, 6, 10$ et pour $q \in \mathbb{N}$.

De $5 \equiv -2 \pmod 7$, on déduit $5^2 \equiv 4 \pmod 7$, $5^4 \equiv 2 \pmod 7$, $5^8 \equiv 4 \pmod 7$ et $5^{12} \equiv 1 \pmod 7$.
On a également $3 \equiv 3 \pmod 7$, puis $3^2 \equiv 2 \pmod 7$, $3^4 \equiv 4 \pmod 7$, $3^8 \equiv 2 \pmod 7$ et $3^{12} \equiv 1 \pmod 7$.
Ce qui conduit au dernier résultat, $5^{12q+r} + 3^{12q+r} + 1 \equiv 0 \pmod 7$ pour $r = 4$ ou 8 et pour $q \in \mathbb{N}$.

On peut remarquer que la propriété est bien une implication. En effet $5^{12} + 3^{12} + 1$ est premier mais $5^{24} + 3^{24} + 1$ est divisible par 103 ; $5^{36} + 3^{36} + 1$ et $5^{48} + 3^{48} + 1$ sont premiers mais pas $5^{60} + 3^{60} + 1$.

Autres solutions : Giovanni Ranieri (Melun), Frédéric de Ligt (Monguyon), Éric Trotoux (Caen), Raymond Heitz (Lavergne), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques).

Complément à l'exercice 494-3

x, y et z désignent des entiers tous distincts.
Montrer que $(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$ est divisible par $5\,(x-y)\,(y-z)\,(z-x)$.

Moubinool Omarjee (Paris) s'est intéressé à cette relation pour d'autres exposants que 5.
Il a trouvé :
$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$ est divisible par $3\,(x-y)\,(y-z)\,(z-x)$;
$(x-y)^7 + (y-z)^7 + (z-x)^7$ est divisible par $7\,(x-y)\,(y-z)\,(z-x)$;
$(x-y)^9 + (y-z)^9 + (z-x)^9$ est divisible par $3\,(x-y)\,(y-z)\,(z-x)$, mais pas par 9 ;
$(x-y)^{11} + (y-z)^{11} + (z-x)^{11}$ est divisible par $11\,(x-y)\,(y-z)\,(z-x)$.

Il propose la conjecture suivante :
Si $p \geq 3$ est un nombre premier, alors $p(x-y)\,(y-z)\,(z-x)$ divise $(x-y)^p + (y-z)^p + (z-x)^p$.