Quelques remarques sur l'espérance de la vie humaine

Paul-Louis Hennequin(*)

L'article, « La Pierre philosophale ? », paru dans le numéro 494, p. 334 repris de la Lettre Blanche de Pénombre s'adressait à un vaste public et certains lecteurs du Bulletin ont souhaité mieux connaître ce thème afin de l'utiliser en classe de mathématique ou dans un travail pluridisciplinaire, c'est l'objectif de ce nouvel article.

Introduction

La durée de la vie humaine est un thème d'étude très riche abordé dès l'antiquité romaine à propos de partage d'un héritage, mais surtout depuis le XVII^{e} siècle avec le développement des rentes viagères, des pensions de retraite et des assurances sur la vie. Il a des implications à la fois individuelles : *combien de temps me reste-t-il à vivre, si possible en bonne santé ?* mais aussi sociales pour assurer l'équité entre l'ensemble de ceux qui cotisent ou cotiseront pour se constituer une assurance-vie, un achat en viager, ou une retraite et l'ensemble de ceux qui en percevront le montant. Des mathématiciens, et non des moindres (Graunt, Petty, Halley, Leibniz, les Huygens, les Bernoulli, Montmort, de Moivre, Euler, Lambert, Deparcieux, Duvillard, Laplace, Lacroix, Fourier, …) s'intéressent à la question depuis 350 ans (cf. références en fin d'article).

Construction d'une table de mortalité, ou de survie

1.1) Table par génération

On considère une cohorte C bien définie, par exemple tous les habitants d'un même département nés une même année A du passé, en distinguant éventuellement hommes et femmes. On suppose :

– que l'âge maximum est n^* (aux alentours de 115 en France actuellement),

– que tous les membres de C sont décédés (donc A < 1895).

Les registres d'état civil du lieu de naissance d'un défunt contiennent sa date de naissance et en principe celle de sa mort qui par soustraction donnent la durée de sa vie et donc l'âge au décès. Ils permettent donc de calculer le nombre d'individus M_n de C dont l'âge au décès était n (on vérifie que la somme des M_n de $n = 0$ à $n = n^*$ est égale au nombre d'éléments de C).

Notons S_n le nombre d'individus de C encore en vie pour leur n-ème anniversaire, S_{n+1} est donc le nombre de ceux qui parmi eux sont encore en vie pour leur $(n + 1)$-ème anniversaire. Le nombre de ceux qui sont décédés à l'âge n est alors $M_n = S_n - S_{n+1}$. On peut donc déduire de la suite $\{M_n\}$ la suite $\{S_n\}$ définie pour :

(*) Paul-Louis.Hennequin@math.univ-bpclermont.fr

$0 \leq n \leq n^*$ par : $S_{n^*+1} = 0$ et $S_n = M_n + S_{n+1}$, ou, ce qui revient au même pour le résultat, par S_0, nombre d'éléments de C, et $S_{n+1} = S_n - M_n$. La table des M_n est dite *table de mortalité*, celle des S_n *table de survie*, mais on emploie souvent un vocable pour l'autre.

Tirons au hasard un individu parmi les S_n survivants d'âge n, soit X_n sa durée de vie à partir de l'âge n. Pour k entier, la probabilité de survivre plus de k années à partir de l'âge n, $P\{X_n \geq k\}$, est égale à $\dfrac{S_{n+k}}{S_n}$. Pour les valeurs non entières de k, on interpole linéairement en choisissant pour $0 < t < 1$,

$$P\left\{X_n \geq k+t\right\} = \frac{(1-t)S_{n+k} + tS_{n+k+1}}{S_n},$$

ce qui revient à supposer que X_n a une densité uniforme sur chaque intervalle $[k, k+1[$.

L'espérance mathématique de X_n, conditionnée par $\{k \leq X_n < k+1\}$, est alors égale à $k + \dfrac{1}{2}$ et $P\left\{k \leq X_n < k+1\right\} = \dfrac{M_{n+k}}{S_n}$, d'où :

$$E_n = \sum_{k=0}^{n^*-n}\left(\frac{M_{n+k}}{S_n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right),$$

ou :

$$E_n = \sum_{k=0}^{n^*-n}\left(\frac{S_{n+k} - S_{n+k+1}}{S_n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)$$

ou encore, en regroupant les termes S_{n+k} :

$$E_n = \sum_{k=0}^{n^*-n}\left(\frac{S_{n+k}}{S_n}\right) - \frac{1}{2}.$$

On appelle E_n l'*espérance de vie à partir de l'âge n*.

À partir des S_n, on définit le *taux de mortalité à l'âge n*,

$$T_n = \frac{M_n}{S_n} = \frac{S_n - S_{n+1}}{S_n},$$

dont on déduit :

$$S_{n+1} = (1 - T_n)S_n,$$

formule qui permet de déterminer les S_n à partir des T_n et de S_0. On peut aussi déterminer les E_n à partir des seuls T_n puisque :

$$\begin{aligned}
E_n &= \sum_{k=0}^{n^*-n}\left(\frac{S_{n+k}}{S_n}\right) - \frac{1}{2} \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n^*-n}\left(\frac{S_{n+k+1}}{S_{n+1}}\frac{S_{n+1}}{S_n}\right) - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} + \left(E_{n+1} + \frac{1}{2}\right)(1 - T_n),
\end{aligned}$$

formule qui permet de déterminer les E_n dans l'ordre des n décroissants en partant de
$E_{n^*} = \frac{1}{2}$.

Remarquons que l'on a aussi :

$$E_n S_n - E_{n+1} S_{n+1} = \frac{S_n + S_{n+1}}{2}.$$

Dans les traités anciens, E_n est parfois appelée *durée de la vie moyenne à partir de n années*.

La constitution d'une table par génération est simple (à partir des registres d'état civil si l'on peut suivre les personnes qui quittent le département), mais elle ne peut être achevée qu'après le décès de tous les membres de la cohorte, soit une bonne centaine d'années après l'année de référence A. Or les différentes quantités tabulées dépendent de A et varient quand on modifie celle-ci ; c'est vrai en particulier des S_n et des M_n, qui sont liés à l'effectif total S_0 de C dont les variations proviennent des migrations, des guerres, des catastrophes naturelles et des épidémies, mais aussi au fait que le taux de mortalité diminue d'année en année, grâce à la médecine, du moins dans nos contrées. C'est la raison pour laquelle on préfère publier des tables dites *du moment* ou *du présent*.

1.2) Table du moment

On fixe une année écoulée (par exemple l'année précédant l'année en cours) notée B et une collectivité bien définie géographiquement ou socialement d'effectif S_0. On relève pour cette collectivité et pour chaque n le taux de mortalité T_n, rapport du nombre de décédés d'âge n en fin d'année B au nombre de vivants d'âge $n - 1$ en début d'année .

On considère alors une population fictive d'effectif total S_0 et on calcule les S_n puis les E_n à partir des n selon les mêmes formules que ci-dessus, en calculant les S_n à partir de S_0. Pour $0 \le n \le n^*$,

$$S_n = S_0 \prod_{k=0}^{n-1} (1 - T_k),$$

$$E_{n^*} = \frac{1}{2},$$

et

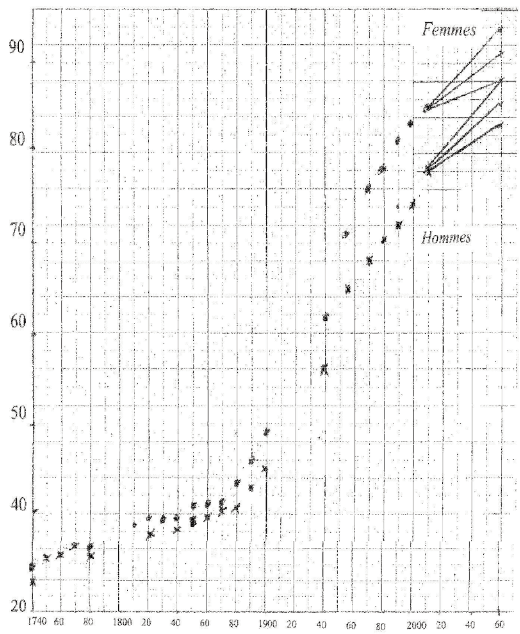
$$E_n = \left(E_{n+1} + \frac{1}{2}\right)(1 - T_n) + \frac{1}{2}.$$

Il est commode de normaliser cette table (cf § 2.1 ci-dessous).

1.3) Table du futur

Durant le XVIII^e et le XIX^e siècle, l'espérance de vie variait très lentement et les tables du moment différaient assez peu des tables par génération. Il n'en a pas été de même tout au long du XX^e, du moins dans nos contrées où l'espérance de vie a augmenté spectaculairement, grâce à la fois aux progrès sanitaires (hygiène, asepsie, vaccinations), sociaux (travail moins pénible, congés payés, constructions antisismiques), politiques (normes d'hygiène et de sécurité, dans les locaux et sur les routes). Nos contemporains, et en particulier les plus jeunes, peuvent espérer, en l'absence de guerres ou de catastrophes naturelles, vivre encore plus longtemps que ce que donnent les tables du moment et *a fortiori* les tables par génération ; pour répondre à cette attente, il faut modéliser cette augmentation et extrapoler, avec tous les risques d'erreur que cela comporte. On constate d'ailleurs que l'espérance de vie à la naissance, après une augmentation spectaculaire, diminue dans certains pays développés, comme aux États -Unis où elle est passée en 2010 de 77,9 à 77,8 ans.

Évolution passée et projetée de l'espérance de vie à la naissance.



Champ : France métropolitaine.
Sources : Insee, estimations de population et statistiques de l'état civil et projection de population 2007-2060.

figure 1

La figure 1 ci-dessus, issue des travaux de l'INSEE, donne à la fois l'évolution de l'espérance de vie à la naissance en France métropolitaine (Femmes et Hommes) de 1740 à 2010 et trois hypothèses d'évolution projetée de 2010 à 2060 qui proposent toutes les trois des extrapolations affines croissant plus ou moins rapidement.

1.4) Deux Remarques

Dans les tables anciennes on calcule aussi la *durée de la vie probable*, nombre d'années qui doivent s'écouler pour que le nombre des vivants soit réduit de moitié ; on parle aujourd'hui de *durée médiane*. Cette médiane se lit immédiatement dans la table en cherchant l'âge où le nombre de survivants est la moitié de l'effectif initial, mais l'espérance de vie après l'âge n se calcule plus facilement dans les agglomérations de tables (cf § 2.2 ci-dessous).

De nos jours, l'utilisation d'un tableur facilite les calculs et permet aussi de mieux comprendre l'articulation des différentes variables, mais le calcul des E_n à partir des T_n nécessite n^* multiplications et il faut contrôler les erreurs d'arrondi et leur propagation.

2. Quelques formules

2.1) Normalisation d'une table

Considérons une table relative à une cohorte de S_0 individus donnant les S_n, les M_n, les T_n et les E_n. Il est commode, pour faciliter les comparaisons, de se ramener à une table pour laquelle l'effectif total est une puissance de 10, usuellement 10^5 ou 10^6, appelée *racine de la table* (nous choisirons 10^5 dans nos exemples). Pour obtenir cette nouvelle table, il suffit de multiplier les S_n et les M_n par un même facteur $\lambda = 10^5/S_0$, tandis que les T_n et les E_n restent inchangés. Nous dirons que nous avons *normalisé* la table.

2.2) Agglomération de tables

Supposons que la cohorte étudiée puisse se partager en c sous-cohortes suivant un critère de sexe (Hommes / Femmes), de profession, de situation géographique. On peut, pour chaque sous-cohorte, bâtir une table et souhaiter agglomérer les sous-cohortes en une seule. Pour ne pas alourdir l'écriture, nous ne détaillons les calculs que pour $c = 2$ (cas Hommes /Femmes).

Nous supposons donc connus les effectifs S_0^H et S_0^F des nés viables des deux sexes et les tables normalisées des S_n^H, M_n^H, T_n^H et E_n^H, ainsi que des S_n^F, M_n^F, T_n^F et E_n^F. Nous souhaitons en déduire les tables normalisées de la réunion des hommes et des femmes.

L'effectif total à la naissance, S_0^T, est égal à $S_0^H + S_0^F$. On observe, sans l'expliquer, que les rapports S_0^H/S_0^T et S_0^F/S_0^T sont, aux fluctuations de mesure près, pratiquement indépendants du lieu et de l'époque et égaux respectivement à 0,512 et 0,488. Nous notons : $\lambda^H = 10^5/S_0^H$, $\lambda^F = 10^5/S_0^F$ et $\lambda^T = 10^5/S_0^T$. Les tables de survie normalisées contiennent donc les nombres $\lambda^H S_n^H$, $\lambda^F S_n^F$ et $\lambda^T S_n^T$ et on a :

$$\lambda^T S_n^T = \lambda^T(S_n^H + S_n^F) = (\lambda^T/\lambda^H)\, \lambda^H S_n^H + (\lambda^T/\lambda^F)\, \lambda^F S_n^F,$$

avec :

$$\lambda^T/\lambda^H = S_0^H/S_0^T \text{ et } \lambda^T/\lambda^F = S_0^F/S_0^T.$$

$\lambda^T S_n^T$ est donc la moyenne de $\lambda^H S_n^H$ et $\lambda^F S_n^F$ pondérée par S_0^H et S_0^F et donc aussi par 0,512 et 0,488.

$$\lambda^T S_n^T = S_n^H(\lambda^H S_n^H) + S_0^F(\lambda^F S_n^F) / (S_0^H + S_0^F) = 0{,}512\,(\lambda^H S_n^H) + 0{,}488\,(\lambda^F S_n^F)$$

De même,

$\lambda^T M_n^T$ est la moyenne de $\lambda^H M_n^H$ et $\lambda^H M_n^F$ pondérée par S_0^H et S_0^F et donc aussi par 0,512 et 0,488,

T_n^T est la moyenne de T_n^H et T_n^F pondérée par S_n^H et S_n^F.

et E_n^T est la moyenne de E_n^H et E_n^F, pondérée par S_n^H et S_n^F.

2.3) Monotonie des suites $\{M_n\}$, $\{S_n\}$, $\{E_n\}$ et $\{T_n\}$

La suite $\{S_n\}$ est décroissante car les morts ne ressuscitent pas ; on a donc $M_n = S_n - S_{n+1} > 0$.

On pourrait penser qu'un individu devenant de plus en plus vulnérable en vieillissant, $\{M_n\}$ est une suite croissante, sauf à la fin de la vie mais il n'en est pas toujours ainsi au début ; aujourd'hui encore, même dans les pays les plus développés, M_0, nombre de décès avant l'âge d'un an est plus grand que M_1. C'était encore plus flagrant au XIX^e siècle : par exemple, d'après la table publiée en 1911 et reproduite ci-dessous figure 2, on constate que la suite $\{M_n\}$ est décroissante de $M_0 = 15\,014$ à $M_{11} = 243$, pour croître ensuite jusqu'à $M_{74} = 2\,064$ et finalement décroître jusqu à $M_{105} = 1$.

493

TABLES DE MORTALITÉ
de la population de la France, d'après les résultats du recensement du 24 mars 1901.
Survivants sur 100 000 nés vivants.

AGES	SEXE masculin p^m	SEXE féminin p^f	POPULATION totale p^{mf}	AGES	SEXE masculin p^m	SEXE féminin p^f	POPULATION totale p^{mf}
Jours				Ans			
0	100 000	100 000	100 000	14	75 062	77 561	76 288
5	97 906	98 329	98 113	15	74 818	77 248	76 012
10	96 952	97 568	97 253	16	74 537	76 903	75 700
15	96 058	96 869	96 454	17	74 211	76 527	75 350
Mois				18	73 837	76 124	74 961
1	94 292	95 449	94 858	19	73 416	75 696	74 536
2	92 400	93 911	93 140	20	72 948	75 246	74 076
3	90 744	92 539	91 624	21	72 438	74 774	73 585
4	89 515	91 541	90 508	22	71 894	74 285	73 068
5	88 445	90 642	89 522	23	71 333	73 780	72 534
6	87 532	89 841	88 663	24	70 775	73 261	71 995
7	86 714	89 113	87 888	25	70 230	72 732	71 458
8	85 961	88 443	87 176	26	69 702	72 197	70 927
9	85 283	87 836	86 533	27	69 190	71 661	70 403
10	84 679	87 295	85 960	28	68 683	71 129	69 883
11	84 143	86 801	85 445	29	68 172	70 599	69 362
Ans				30	67 653	70 068	68 837
1	83 674	86 351	84 986	31	67 121	69 536	68 305
2	80 839	83 617	82 200	32	66 575	69 002	67 764
3	79 310	82 150	80 701	33	66 012	68 465	67 214
4	78 365	81 200	79 753	34	65 434	67 923	66 653
5	77 692	80 496	79 065	35	64 839	67 377	66 082
6	77 199	79 974	78 557	36	64 228	66 825	65 499
7	76 808	79 553	78 152	37	63 601	66 269	64 907
8	76 478	79 199	77 811	38	62 959	65 709	64 306
9	76 195	78 892	77 516	39	62 306	65 147	63 697
10	75 944	78 616	77 253	40	61 641	64 583	63 082
11	75 714	78 358	77 010	41	60 960	64 015	62 457
12	75 497	78 105	76 776	42	60 261	63 441	61 819
13	75 283	77 844	76 539	43	59 541	62 859	61 167

494

TABLES DE MORTALITÉ
de la population de la France (suite).
Survivants sur 100 000 nés vivants.

AGES	SEXE masculin p^m	SEXE féminin p^f	POPULATION totale p^{mf}	AGES	SEXE masculin p^m	SEXE féminin p^f	POPULATION totale p^{mf}
Ans				Ans			
43	59 541	62 859	61 167	75	17 815	23 454	20 579
44	58 799	62 266	60 498	76	15 879	21 237	18 521
45	58 033	61 661	59 811	77	13 984	19 036	16 474
46	57 242	61 043	59 105	78	12 152	16 878	14 481
47	56 424	60 409	58 377	79	10 403	14 787	12 562
48	55 580	59 757	57 627	80	8 774	12 789	10 750
49	54 711	59 084	56 854	81	7 302	10 913	9 079
50	53 818	58 385	56 057	82	6 005	9 194	7 573
51	52 903	57 659	55 234	83	4 871	7 638	6 231
52	51 965	56 904	54 386	84	3 885	6 253	5 049
53	51 005	56 119	53 511	85	3 037	5 037	4 020
54	50 020	55 302	52 609	86	2 337	3 996	3 152
55	49 004	54 452	51 675	87	1 778	3 143	2 448
56	47 949	53 563	50 702	88	1 337	2 451	1 884
57	46 817	52 629	49 682	89	993	1 895	1 435
58	45 689	51 640	48 606	90	728	1 452	1 083
59	44 473	50 572	47 468	91	526	1 103	809
60	43 199	49 411	46 264	92	375	830	598
61	41 867	48 237	44 994	93	263	619	438
62	40 479	46 966	43 639	94	181	457	317
63	39 036	45 609	42 261	95	122	334	227
64	37 542	44 187	40 802	96	80	242	160
65	35 998	42 694	39 282	97	51	173	111
66	34 403	41 130	37 702	98	32	123	76
67	32 754	39 493	36 059	99	19	86	52
68	31 049	37 771	34 346	100	11	59	35
69	29 287	35 958	32 558	101	6	40	22
70	27 463	34 053	30 696	102	3	26	13
71	25 589	32 061	28 763	103	1	16	8
72	23 669	29 989	26 768	104	0,2	9	4
73	21 722	27 850	24 727	105	0,0	3	1
74	19 774	25 665	22 661	106		0	0

figure 2

De : $E_n - \frac{1}{2} = \left(E_{n+1} + \frac{1}{2}\right)(1 - T_n)$ et de $0 < T_n < 1$, on déduit :

$$0 \leq E_n - \frac{1}{2} \leq E_{n+1} + \frac{1}{2}$$

ou

$$\frac{1}{2} \leq E_n \leq E_{n+1} + 1,$$

d'où :

$$\frac{1}{2} \leq E_n \leq E_{n+k} + k \leq E_{n^*} + (n^* - n) = \frac{1}{2} + (n^* - n).$$

De nos jours et dans nos contrées, l'espérance de vie à l'âge n, E_n, est croissante dès E_0, mais il n'en a pas été toujours ainsi. Par exemple, dans une table du tome 4 de l'Histoire Naturelle de Buffon (1777), reproduite dans [9] p. 117, E_n est croissante de $E_0 = 8$ à $E_7 = 42{,}25$ et décroît ensuite jusqu'à $E_{85} = 3$. Si la suite $\{M_n\}$ est croissante et la suite $\{S_n\}$ décroissante, $\{T_n\}$ est *a fortiori* croissante car $T_n = M_n/S_n$. Mais si on reprend la table de la figure 2 et qu'on calcule les $T_n = 1 - \frac{S_{n+1}}{S_n}$, on constate que T_n décroît de $T_0 = 0{,}150\,34$ à $T_{11} = 0{,}031\,55$, pour croître ensuite jusqu'à $T_{105} = 1$.

De $T_{n+1} - T_n \geq 0$, on déduit :

$$S_{n+2}/S_{n+1} \leq S_{n+1}/S_n.$$

La suite $\{S_{n+1}/S_n\}$ est donc décroissante.

On a aussi, en prenant le logarithme :

$$\ln(S_{n+2}) - \ln(S_{n+1}) \leq \ln(S_{n+1}) - \ln(S_n)$$

qui exprime la concavité de la courbe obtenue en joignant les points $[n, \ln(S_n)]$.

3. Le calcul des retraites

3.1) Modélisation.

La construction d'un système de retraite est un problème complexe qui fait intervenir
– l'âge a du début d'une activité professionnelle,
– l'âge r de la prise de retraite,
– le montant α des annuités versées pendant la période d'activité,
– le montant ρ de la retraite annuelle perçue.

Ces quantités peuvent dépendre du sexe, de la catégorie socio-professionnelle (voir figure 3 une table INSEE des années 60), de la formation, de l'expérience, de l'ancienneté ; pour en tenir compte il suffit de faire des tables sous-ensemble par sous-ensemble et de les agglomérer comme nous l'avons fait au § 2.2 ci dessus.

Pour être plus complet, il faudrait prendre en compte pour chacun les périodes de chômage, l'évolution du salaire tout au long de la carrière, les pensions de réversion et les assurances-vie en cas de décès avant la retraite. Nous supposons qu'on répartit chaque année entre les retraités les cotisations versées par les actifs.

Cathégorie socio-professionnelle	Espérance de vie à		Survivants à 75 ans p.1000 à
	35 ans	60ans	35 ans
Instituteurs	40,9	18,6	574
Cadres sup. Prof, libérales	40,5	18,3	551
Clergé catholique	39,5	17,7	524
Cadres moyens (public)	39,3	17,6	518
Techniciens	39,0	17,6	507
Cadres moyens (privé)	38,5	17,3	489
Agriculteurs exploitants	38,0	16,9	473
Contremaîtres	37,8	16,8	472
Ouvriers qualifiés (public)	37,3	16,4	446
Employés (public)	37,2	16,4	448
Artisans et commerçants	37,6	16,9	460
Employés (privé)	37,4	16,9	448
Ouvriers spécialisés (public)	36,0	15,7	406
Ouvriers qualifiés (privé)	35,6	15,3	380
Salariés agricoles	34,8	14,7	356
Ouvriers spécialisés (privé)	34,7	14,9	362
Manœuvres	32,9	14,4	310
France entière	**36,1**	**16,0**	**412**

figure 3

3.2) Le modèle simple

Commençons par un modèle simplifié où l'on ne tient compte ni de la croissance économique, ni de la démographie. Notons α la cotisation annuelle de retraite, n un entier compris entre a et $r - 1$ Parmi les S_n actifs vivant à l'age n, S_{n+1} survivent à l'âge $n + 1$ et versent $\alpha\, S_{n+1}$; les autres en nombre S_n - S_{n+1} décèdent à l'âge n. après avoir versé en moyenne $\dfrac{S_n - S_{n+1}}{2}$. Les personnes d' âge n ont donc versé :

$$\frac{(S_n + S_{n+1})\alpha}{2},$$

qui est aussi égal à

$$(E_n S_n - E_{n+1} S_{n+1})\alpha.$$

En sommant de $n = a$ à $n = r - 1$, on obtient le montant total des annuités soit

$$(E_a S_a - E_r S_r)\alpha.$$

Chacun des S_r survivants à l'âge r touche pendant en moyenne E_r années une retraite de montant ρE_r, le total des retraites versées s'élève donc à $\rho E_r S_r$ et le système est équilibré si :

$$\alpha(E_a S_a - E_r S_r) = \rho E_r S_r.$$

Le tableau ci-dessous calcule, à partir des données INSEE et pour la France, les rapports ρ/α à l'équilibre, successivement pour les hommes et pour les femmes, en choisissant $a = 20$ et $r = 60$ pour les années 1973-1977, 1989-1991, 1998-2000. On voit donc que le rapport ρ/α a diminué très sensiblement, ce qui a nécessité une intervention du législateur et deux réformes. Si σ est le salaire annuel il semble raisonnable d'assurer les inégalités $\rho > \sigma/2$ et $\alpha < \sigma/4$ qui impliquent $\rho/\alpha > 2$, inégalité qui a cessé d'être assurée à partir des années quatre-vingt-dix, du moins dans ce modèle ; en fait la situation est un peu plus favorable (cf. § 3.4 ci-dessous).

Hommes	S_{20}	E_{20}	S_{60}	E_{60}	ρ/α
1973-76	97105	50,98	77772	16,61	2,84
1989-91	98318	53,84	82131	19,00	2,40
1998-00	98879	55,75	85185	20,20	2,20
2006-08	99167	58,02	87384	21,94	1,99
Femmes	S_{20}	E_{20}	S_{60}	E_{60}	ρ/α
1973-76	98055	58,44	89106	21,44	2,00
1989-91	98895	61,74	92203	24,17	1,70
1998-00	99250	63,13	93212	25,38	1,60
2006-08	99431	64,79	94014	26,84	1,55
Total	S_{20}	E_{20}	S_{60}	E_{60}	ρ/α
1973-76	97567	54,87	85303	19,19	2,27
1989-91	98600	57,80	87046	21,7	2,02
1998-00	99060	59,45	89102	22,91	1,88
2006-08	99296	61,53	90620	24,42	1,75

figure 4

Dans le système proposé dans l'article « *La pierre philosophale ?* », les cotisations des actifs ne sont pas reversées aux retraités instantanément, mais après une période de capitalisation de T années. Le système semble séduisant, mais sa mise en route nécessite un apport extérieur car pendant une vingtaine d'années les mêmes cotisations ne peuvent pas servir à payer à la fois les retraites de l'année D en cours et celles de l'année D + T.

3.3) Prise en compte de la croissance économique

Supposons maintenant que chaque année le taux de croissance soit λ de sorte que annuité et pension de l'année seront celles de l'année précédente multipliées par $(1 + \lambda)$. À l'équilibre, ces facteurs se simplifient et on a toujours

$$\alpha(E_aS_a - E_rS_r) = \rho E_rS_r.$$

3.4) Prise en compte de la démographie

Les effets de la démographie sont plus subtils à analyser : il faut prendre en compte la population totale, le nombre de naissances et la mortalité infantile. Alors qu'elle n'avait crû que de 3% entre 1900 et 1950, la population de la France métropolitaine a augmenté de 50% de 1950 à 2010 (c'est le fameux baby-boom devenu papy-boom).

Plus précisément, les nombres étant exprimés en millions :
N_{20-59} des 20-59 ans est passé
de 22,4 en 1950 à 30,1 en 1990, puis 32,4 en 2010,
$N_{>59}$ des 60 ans et plus
de 6,7 en 1950 à 10,7 en 1990, puis 14,1 en 2010,
et le rapport $N_{20-59}/N_{>59}$ entre les actifs et les retraités
de 3,3 en 1950 à 2,8 en 1990 puis 2,3 en 2010.

La croissance de la population a donc amélioré la situation des retraités ; en effet les natifs de 1950 ont commencé à cotiser en 1970 et n'ont commencé à toucher une retraite qu'en 2010 ; ceci a augmenté très sensiblement le rapport ρ/α de 1950 à 2010 par rapport aux valeurs trouvées en 3.1, mais, même si ce taux de croissance démographique se maintient, son effet sur les retraites cessera quand tous les natifs de 1950 auront disparu.

4. Utilisation en classe

Ce thème inter-disciplinaire peut faire l'objet d'études dès le collège, puis au lycée en :

Mathématiques : à partir de tableaux de données, disponibles à la fois dans de nombreux recueils statistiques et sur la toile, en construire des représentations diverses, extraire des informations, se poser des questions. Au lycée, comparer avec les modèles exponentiels de la radioactivité et de la fiabilité ;

Biologie et éducation à la santé : étudier les causes de mortalité (conditions de vie, pénibilité, maladie, accidents suivant les catégories socioprofessionnelles (cf. figure 3), les effets de la découverte d'un vaccin, d'un médicament ou de nouvelles techniques d'investigation ;

Histoire, Géographie, Sciences économiques et sociales, Éducation civique : retracer l'histoire de la question (cf. les références [2], [5], [6], [7], [8] et [9]) ; étudier les écarts entre les époques et les pays et réfléchir aux implications financières (rentes viagères et fonds de placement), sociales et politiques (retraites, aides aux personnes âgées, …) ;

Littérature et philosophie : étude de textes (par exemple : la fable de La Fontaine « *Le vieillard et les trois jeunes hommes* » ou la sentence de Vauvenargues : « *Il faut vivre comme si on ne devait jamais mourir* »).

5. Où trouver des tables ?

Il n'est pas question de répertorier ici tout ce qu'on trouve sur la Toile. Les sites de l'*Institut National d'Études Démographiques* http://www.ined.fr/ et de l'*Institut National de la Statistique et des Études Économiques* http://www.insee.fr/, organismes créés en 1945, sont très fournis concernant la population française contemporaine.

Avant 1945, le *Bureau des Longitudes*, institué par la Convention le 7 messidor an III, publiait chaque année, outre de riches tables astronomiques, des tables de mortalité. Certains volumes sont disponibles sur le serveur Gallica de la BNF ou dans la Bibliothèque universelle.

Par exemple, l'annuaire 1911 contient 9 tables de mortalité (ou de survie) :
– une table du moment de la mortalité de la population française (Hommes, Femmes et Total, de 1 mois à 106 ans) ; cette table est reproduite figure 2 ci-dessus ;
– une table de la caisse nationale des retraites ;
– une table des assurés et une des rentiers français, résultant d'observations sur la clientèle des compagnies d'assurance françaises ;
– une table des 20 principales compagnies d'assurance anglaises (1862-63), donnant seulement la mortalité observée des hommes ;
– une table des 23 compagnies allemandes (1875, d'après 546 084 contrats) ;
– une table américaine (1868) ;
– une table de mortalité des pensionnaires civils de l'État (1871) ;
– une table de Deparcieux construite au XVIIIe siècle et utilisée tout au long du XIXe.

6. Quelques références

[1] A. Dittgen *La pierre philosophale ?* Bulletin APMEP n° 494, p. 334-336.

[2] J. Dupâquier, *L'invention de la table de mortalité*. P.U.F. coll. Sociologies, 1996.

[3] P.-L. Hennequin, *Les tables de mortalité au XVIIe et au XVIIIe*, Tangente Hors série n° 10, été 2000, p. 68-70.

[4] P.-L. Hennequin, *L'espérance de vie, ici et ailleurs, depuis 400 ans*, Université d'été St-Flour 2006.

[5] H. Le Bras, *Naissance de la mortalité, l'origine politique de la statistique et de la démographie*. Gallimard-Le Seuil, coll. Hautes Études, 2000.

[6] B. Parzysz, *L'espérance de vie des frères Huygens*, Bulletin APMEP n° 416, p. 374-381.

[7] B. Parzysz, *Le joueur et le banquier*, Histoire des Probabilités et Statistiques, colloque d'Orléans 2003, Éd. Ellipses, p. 77-90.

[8] J.-F. Pichard, *Sur la durée de la vie et l'espérance de vie*, Les Probabilités au lycée, inter-IREM stat-proba, juin 1997, p. 315-327.

[9] H. Plane, F. Métin, P. Guyot, *Tables de natalité, tables de mortalité, à tables*, Histoire des Probabilités et Statistiques, Orléans 2003, Éd. Ellipses, p. 91-118.