Le problème des frites *light*

Cellule de géométrie de la HECFH(*)

1. Introduction

Les frites sont assurément une spécialité culinaire belge. Elles peuvent donner lieu à des réflexions mathématiques.

En fonction de l'aire des alvéoles de la grille qui permet de les découper, les frites se classent en trois types: allumettes – moyennes – grosses.

Traditionnellement, les alvéoles des grilles pour découper les frites sont formées de carrés isométriques dont les longueurs des côtés mesurent respectivement 6 mm, 8 mm et 10 mm. C'est-à-dire 36 mm^2, 64 mm^2 et 100 mm^2 d'aire.

Afin de rendre les frites les plus light possible, on peut se poser la question suivante : pour un même volume de pomme de terre, les grilles carrées minimisent-elles la quantité de graisse sur les frites ? Autrement dit, ne faudrait-il pas créer des grilles dont les alvéoles sont autres que des carrés pour alléger ces frites ?

Pour pouvoir comparer ce qui est comparable, c'est-à-dire la quantité de graisse sur des frites de formes différentes, il faut qu'elles aient le même volume. Ceci revient à demander à ce que les différentes formes d'alvéoles aient la même aire puisque, si une **même pomme de terre** passe dans deux grilles de formes différentes, les deux sortes de frites auront bien évidement la même hauteur. Dès lors, pour qu'elles aient le même volume, il est nécessaire que les deux types d'alvéoles soient de même aire.

Il en résulte que, pour une aire d'alvéole donnée et afin que la frite soit la plus légère possible, il faut choisir une forme d'alvéole qui, pour une aire donnée (un type de frites), minimise l'aire totale de la frite. En effet, il semble logique de supposer que la quantité de graisse (d'huile) sur une frite est proportionnelle à l'aire en contact avec la graisse (l'huile).

(*) Haute École de la Communauté Française en Hainaut : www.hecfh.be/cellulegeometrie
Michel DEMAL, Jérémy DRAMAIX, Samuel HIGNY, Cindy LAFOT, Angelo MALAGUERRA.
geometrie@hecfh.be

Pour des raisons techniques et par facilité, les grilles à frites sont fabriquées à partir d'alvéoles toutes identiques (isométriques). Il faut donc choisir les formes d'alvéoles parmi les polygones qui peuvent paver le plan (la grille) avec des formes d'alvéoles toutes isométriques.

On peut aussi montrer que:

- parmi les n-gones (n fixé) ayant la même aire (n-gones isosuperficiels), le n-gone **régulier** convexe est celui qui possède le plus petit périmètre(1) ;
- parmi les n-gones **réguliers** convexes (n non fixé) ayant la même aire, celui qui possède le plus grand nombre de côtés est celui qui possède le plus petit périmètre, avec à la limite comme plus petit périmètre le disque (qui n'est pas un polygone régulier)(2).

Le problème se ramène donc à choisir la forme des alvéoles isométriques d'une grille parmi les polygones **réguliers** convexes qui pavent le plan (la grille) afin de rendre l'aire totale de la frite la plus petite possible.

Nous savons, que seuls les triangles équilatéraux, les carrés et les hexagones réguliers peuvent paver le plan. Il s'agit des trois fameux pavages réguliers du plan. Il s'ensuit qu'il faudra choisir parmi les frites dont les bases sont des triangles équilatéraux, des carrés ou des hexagones réguliers pour obtenir les frites les plus légères.

Montrons que parmi les différentes sortes de frites d'aire de base S et de hauteur h données, ce sont les frites à bases hexagonales régulières qui minimisent l'aire totale des frites.

Comme les frites à comparer ont toutes la même hauteur et la même aire de base, pour calculer l'aire totale des différentes sortes de frites, il suffit de déterminer le périmètre d'un carré, d'un triangle équilatéral et d'un hexagone régulier sachant que ceux-ci possèdent la même aire.

Les frites ayant la forme d'un prisme droit, l'aire totale sera donnée par :

$$\text{aire totale} = 2 \times \text{aire de base} + \text{aire latérale}.$$

2. Recherche des aires totales des frites de forme hexagonale, carrée et triangulaire dont la hauteur *h* et l'aire de base S sont données

Comme l'aire latérale des frites est fonction du périmètre de la base, il est nécessaire de déterminer au préalable le périmètre d'un carré, d'un triangle équilatéral et d'un hexagone régulier tous d'aire S.

(1) Voir l'article « Isopérimètres en toute simplicité » (Georges Lion) publié dans le Bulletin Vert 496.
(2) Voir « Maxima and minima without calculus » (Ivan Niven) publié et distribué par The Mathematical Association of America.

On peut montrer grâce au théorème de Pythagore que:

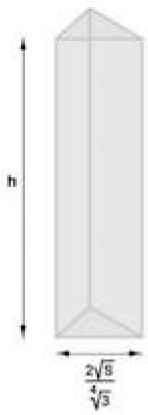
• le périmètre du triangle équilatéral vaut : $3 \cdot \dfrac{2 \cdot \sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}} = 2 \cdot \sqrt{S} \cdot \sqrt[4]{27} \approx 2 \cdot \sqrt{S} \cdot 2{,}27\ldots$

• le périmètre du carré vaut : $4 \cdot \sqrt{S} = 2 \cdot \sqrt{S} \cdot 2$

• le périmètre de l'hexagone régulier vaut : $6 \cdot \dfrac{2 \cdot \sqrt{S}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt[4]{3}} = 2 \cdot \sqrt{S} \cdot \sqrt[4]{12} \approx 2 \cdot \sqrt{S} \cdot 1{,}86\ldots$

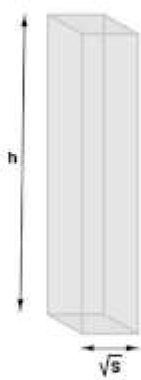
Il s'ensuit que:

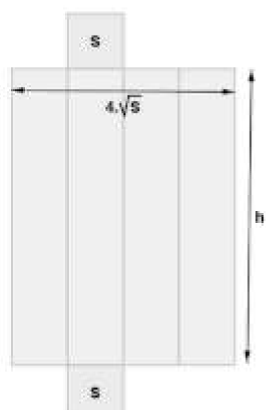
• l'aire totale d'une frite à base triangulaire d'aire S et de hauteur h données vaut:



$$\boxed{\Rightarrow S_{(\text{frite à base triangulaire})} = 2 \cdot S + 3 \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}} \cdot h}$$

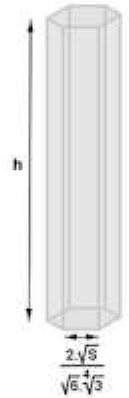
• l'aire totale d'une frite à base carrée d'aire S et de hauteur h données vaut:





$$\boxed{\Rightarrow S_{(\text{frite à base carrée})} = 2 \cdot S + 4 \cdot \sqrt{S} \cdot h}$$

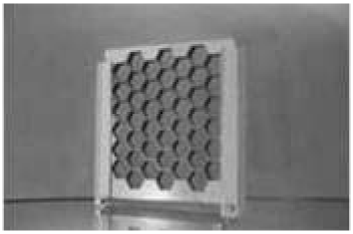
• l'aire totale d'une frite à base hexagonale d'aire S et de hauteur h données vaut:



$$\Rightarrow S_{\text{(frite à base hexagonale)}} = 2 \cdot S + 6 \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{S}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt[4]{3}} \cdot h$$

La plus petite aire, pour une aire de base S et une hauteur h données, est rencontrée dans le cas des frites à bases hexagonales régulières. En effet, les trois expressions ci-dessus font apparaître à chaque fois les termes $2 \cdot S$ et $\sqrt{S} \cdot h$ multiplié par un coefficient. La plus petite aire sera donc celle dont le coefficient de $\sqrt{S} \cdot h$ sera le plus petit puisque le terme $2 \cdot S$ apparaît de la même manière dans les trois formules.

Comme le coefficient $\sqrt{S} \cdot h$ dans la formule des frites hexagonales $\left(6 \cdot \frac{2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt[4]{3}} = 3{,}72\ldots\right)$ est plus petit que le coefficient dans la formule des frites carrées (4) qui lui-même est plus petit que le coefficient dans la formule des frites triangulaires $\left(3 \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{3}} = 4{,}55\ldots\right)$, il en résulte qu'il faut réaliser des grilles à frites avec des alvéoles isométriques hexagonales pour obtenir, quel que soit le type de frites choisi, des frites les plus *light* possibles.



Remarque : idéalement, pour obtenir les frites les plus *light*, il faudrait des alvéoles circulaires isométriques mais ceci est impossible car les cercles ne pavent pas le plan (la grille).
Une dernière question subsiste: *Quel est, en pourcentage, l'avantage des grilles avec des alvéoles hexagonales par rapport aux grilles avec des alvéoles carrées ou triangulaires ?*

Pour répondre à cette question, il suffit de comparer, pour une hauteur h donnée, les aires des frites dont les bases sont respectivement carrée, hexagonale et triangulaire.

3. Valeurs comparatives des aires totales des frites hexagonales, carrées et triangulaires en fonction du type de frites (allumettes, moyennes, grosses) et d'une hauteur h donnée

Les tableaux ci-dessous donnent les variations en absolu et en pourcentage des aires pour chaque type de frites d'une hauteur h en cm et d'une aire de base S en cm^2 données.

Aire de la base en cm²	Hauteur de la frite en cm	Aire totale de la frite selon la base en cm²		
		Triangulaire	Carrée	Hexagonale
0,36	5	14,4	12,7	11,9
		113,2	**100**	93,5
		121,1	107,0	**100**
0,64	5	19,5	17,3	16,2
		112,9	**100**	93,6
		120,7	106,9	**100**
1	5	24,8	22,0	20,6
		112,7	**100**	93,7
		120,3	106,7	**100**
0,36	8	22,6	19,9	18,6
		113,5	**100**	93,3
		121,6	107,2	**100**
0,64	8	30,5	26,9	25,1
		113,3	**100**	93,4
		121,3	107,1	**100**
1	8	38,5	34,0	31,8
		113,2	**100**	93,5
		121,1	107,0	**100**

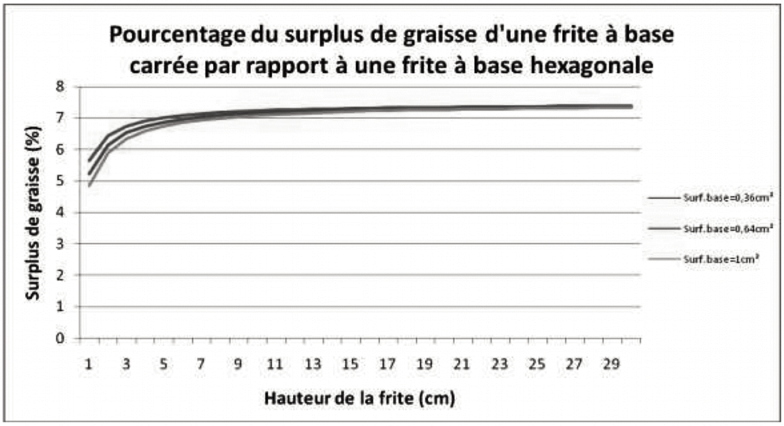
0,36	10	28,1	24,7	23,1
		113,6	**100**	93,3
		121,8	107,2	**100**

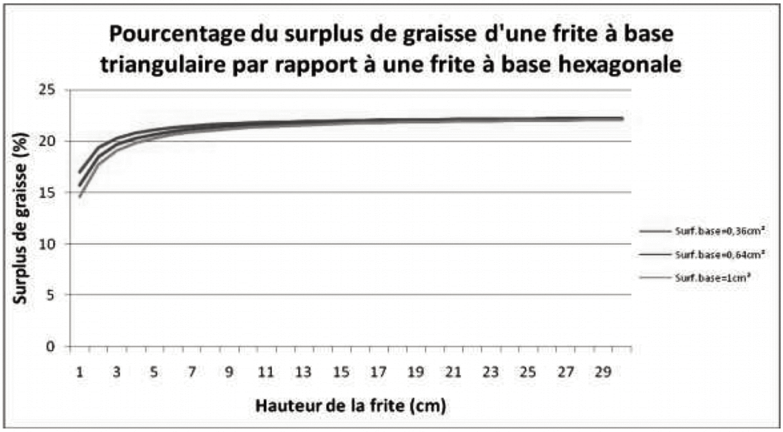
0,64	10	37,8	33,3	31,1
		113,4	**100**	93,3
		121,5	107,1	**100**

1	10	47,6	42,0	39,2
		113,3	**100**	93,4
		121,3	107,1	**100**

Les graphiques ci-joints représentent le pourcentage du surplus de graisse d'une frite à base triangulaire ou carrée par rapport à une frite à base hexagonale en fonction de la hauteur et selon le type de frites :

- frites allumettes de 0,36 cm² d'aire de base
- frites moyennes de 0,64 cm² d'aire de base
- grosses frites de 1 cm² d'aire de base





• Le pourcentage du surplus de graisse des frites carrées et triangulaires par rapport aux frites les plus *light* (hexagonales) peut se calculer de la manière suivante :

Si la frite la plus light, à savoir la frite hexagonale, est considérée comme référentiel, il vient que, pour une aire de base S et une hauteur h donnée :

$$S_{(\text{frite à base carrée})} = x \times S_{(\text{frite à base hexagonale})}$$

$$\Rightarrow x = \frac{S_{(\text{frite à base carrée})}}{S_{(\text{frite à base hexagonale})}} = \frac{2\cdot S + 4\cdot\sqrt{S}\cdot h}{2\cdot S + 2\cdot\sqrt[4]{12}\cdot\sqrt{S}\cdot h}.$$

À titre d'exemple, si S = 0,64 cm^2 et h = 5 cm :

$$x = \frac{2\cdot 0{,}64 + 4\cdot\sqrt{0{,}64}\cdot 5}{2\cdot 0{,}64 + 2\cdot\sqrt[4]{12}\cdot\sqrt{0{,}64}\cdot 5} \approx 1{,}069.$$

Dès lors, l'aire de cette frite à base carrée vaut 106,9 % de l'aire de la frite à base hexagonale de même aire de base et de même hauteur.

La variation est donc de 6,9%. On peut ainsi conclure que la frite à base carrée est 6,9% plus grasse que la frite à base hexagonale.

• L'analyse des graphiques de la page 6 suggère qu'il existe un pourcentage maximum absolu de surplus de graisse des frites à base carrée et à base triangulaire par rapport aux frites à bases hexagonales quelle que soit l'aire de base considérée.

Détermination du pourcentage maximum absolu

La fonction qui exprime le rapport entre l'aire de la frite carrée et l'aire de la frite hexagonale est, quelles que soient la hauteur h et l'aire de base S considérées :

$$f(h) = \frac{2\cdot S + 4\cdot\sqrt{S}\cdot h}{2\cdot S + 2\cdot\sqrt[4]{12}\cdot\sqrt{S}\cdot h}.$$

Comme cette fonction, pour une aire S donnée, est strictement croissante (en la variable h), la valeur maximale qu'elle peut prendre est donnée par :

$$\lim_{h\to\infty} \frac{2\cdot S + 4\cdot\sqrt{S}\cdot h}{2\cdot S + 2\cdot\sqrt[4]{12}\cdot\sqrt{S}\cdot h} = \frac{4\cdot\sqrt{S}}{2\cdot\sqrt[4]{12}\cdot\sqrt{S}} = \frac{2}{\sqrt[4]{12}} \approx 1{,}075.$$

Autrement dit, le plus grand pourcentage de surplus de graisse des frites carrées, quelle que soit la hauteur de celles-ci, par rapport aux frites hexagonales est de 7,5…%.

Un même raisonnement montre que le plus grand pourcentage de surplus de graisse des frites triangulaires, quelle que soit la hauteur de celles-ci, par rapport aux frites hexagonales est de 22,5… %.

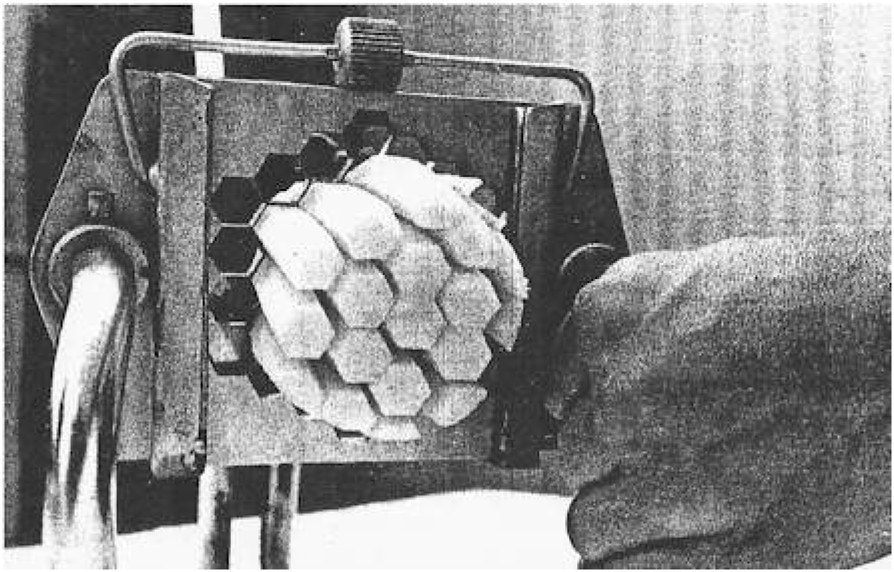


Photo issue du journal Le Soir du vendredi 24 octobre 1997.

Les personnes intéressées par des publications analogues peuvent consulter – sur le site www.hecfh.be/celluledegeometrie – le document « Les dérivées au service de la gastronomie et des régimes en Belgique » où l'on recherche, parmi des croquettes de pomme de terre isovolumétriques, celle qui sera la plus light après cuisson dans une friture. S'y trouve également le problème de la recherche parmi les croquettes cylindriques de surface minimale, les croquettes de forme cubique et celles de forme sphérique celle qui sera la plus light après cuisson.