Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à
Max HOCHART
13, rue des Garennes
63 800 Cournon d'Auvergne
ou
hochartmax@yahoo.fr

Remerciements – Le graphe probabiliste et les figures géométriques présents dans cette rubrique sont dus à **Aurélien Chevaleyrias**, étudiant en classe de mathématiques spéciales au lycée Blaise Pascal de Clermont-Ferrand. Je remercie donc vivement Aurélien (dont les compétences en LATEX dépasse désormais largement celles de son professeur de mathématique supérieures !).

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 496-1 (Michel Lafond)

Un triangle a un périmètre p et une aire $\mathcal{A}$. Montrer que chaque côté du triangle mesure au plus

$$\frac{p}{6}\left(1+2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(1-\frac{864\mathcal{A}^2}{p^4}\right)\right)\right).$$

Problème 496–2

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [0, n]$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Pour tout nombre premier p, établir les relations suivantes :

1. $\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \mod p$ pour tout entier $k \in [[0, p-1]]$;
2. $\binom{p+1}{k} \equiv 0 \mod p$ pour tout entier $k \in [[2, p-1]]$;
3. $\binom{2p}{p} \equiv 2 \mod p$;
4. $\binom{pa}{pb} \equiv \binom{a}{b} \mod p$ pour $a, b \in \mathbb{N}$ avec $a \geq b$.

Problème 496–3

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que, pour tout réel x,

$$f\left(f\left(x\right)\right)+x=2f\left(x\right).$$

Problème 496–4

Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $x_1, \ldots, x_n$, simplifier la somme ci-dessous :

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n}\min\left(x_{i_1},\ldots,x_{i_k}\right).$$

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 488-1 (Question de Louis-Marie Bonneval)

Le Bon, la Brute, le Truand s'affrontent dans un ultime combat. Ils sont d'habiletés inégales : le Bon atteint sa cible deux fois sur trois, la Brute une fois sur deux, le Truand une fois sur trois. Le combat se déroule en rounds successifs où chacun vise son adversaire le plus dangereux, et où ils tirent en même temps (à chaque round, les résultats des tirs sont donc indépendants). Ces rounds se répètent tant qu'il reste au moins deux adversaires. Quelle est la probabilité pour chacun de gagner le combat ? Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun survivant ? Combien de rounds peut-on s'attendre à ce que dure le combat ?

Solutions de Louis-Marie Bonneval (Poitiers), Pierre Carriquiry (Clichy), Laurent Chéno (Lycée Dorian, Paris), François Couloigner (Tarbes), Frédéric de Ligt (Montguyon), Michel Lafond (Dijon), Georges Lion (Wallis), Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques), Christian Planchon (Marvejols), Sergio Leone (Almeria).

La plupart des lecteurs utilise les séries (sommes géométriques et dérivées) pour les calculs. Suivant **Georges Lion**, on désigne respectivement le bon, la brute et le truand par les lettres B, b, T .

Le triplet (B, b, T) étant donné, les issues possibles sont (B, b, T), (B, T), (b, T) et T avec les probabilités respectives

$$\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{2}{9},\frac{4}{9}.$$

Détaillons par exemple les trois premières probabilités, ce qui donnera automatiquement la valeur de la dernière. En présence des trois protagonistes, le bon vise la brute (son adversaire le plus dangereux), tandis que la brute et le truand visent le bon. Pour que les trois acteurs restent vivants, il faut que le bon rate la brute mais aussi que la brute et le truand ratent le bon. Ainsi,

$$p\left(\left(\mathrm{B},b,\mathrm{T}\right)\to\left(\mathrm{B},b,\mathrm{T}\right)\right)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{9}.$$

Pour que ne survivent que le bon et le truand, il faut que le tir du bon atteigne la brute et que la brute et le truand visent mal le bon. Donc

$$p\big((\mathrm{B},b,\mathrm{T})\to(\mathrm{B},\mathrm{T})\big)=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}.$$

Pour que ne survivent que la brute et le truand, il faut que le bon rate la brute et que la brute ou le truand atteigne le bon. Donc

$$p\big((\mathrm{B},b,\mathrm{T})\to(b,\mathrm{T})\big)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}.$$

On laisse au lecteur le soin de détailler les calculs ci-dessous :

le couple (B, T) étant donné, les issues possibles sont (B, T), B, T, $\varnothing$ avec les probabilités respectives

$$\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{1}{9},\frac{2}{9},$$

tandis que le couple (b, T) étant donné, les issues possibles sont (b, T), b, T, $\varnothing$ avec les probabilités respectives

$$\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}.$$

On en déduit le graphe probabiliste suivant :

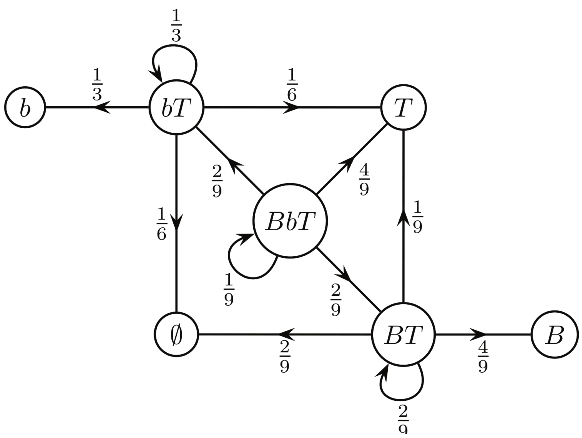

FIGURE 1 – Graphe probabiliste.

Calculons maintenant la probabilité pour chacun d'être le seul survivant du combat. On commence par le bon. Tant que le bon et la brute sont présents, personne ne tire sur le truand. Le bon doit d'abord éliminer la brute, puis le truand. On doit nécessairement passer de l'état (B, b, T) à (B, T) (en stationnant autant qu'on le souhaite sur l'état (B, b, T)), puis passer de l'état (B, T) à B (en stationnant autant qu'on le souhaite sur l'état (B, T)). Ainsi,

$$\begin{aligned} p(\mathrm{B}) &= \left(\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^m\right)\times\frac{2}{9}\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)\times\frac{4}{9} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{9}}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{1-\frac{2}{9}}\times\frac{4}{9} \\ &= \frac{9}{8}\times\frac{2}{9}\times\frac{9}{7}\times\frac{4}{9}=\frac{1}{7}. \end{aligned}$$

On calcule ensuite la probabilité que la brute soit le seul survivant du combat. On doit passer de l'état $(\mathrm{B}, b, \mathrm{T})$ à (b, T) puis de l'état (b, T) à b. Ainsi,

$$\begin{aligned} p(b) &= \left(\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^m\right)\times\frac{2}{9}\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\times\frac{1}{3} \\ &= \frac{9}{8}\times\frac{2}{9}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Pour le truand, la situation est plus compliquée. On peut passer de l'état $(\mathrm{B}, b, \mathrm{T})$ à (B, T) puis de l'état (B, T) à T, mais on peut aussi passer de l'état $(\mathrm{B}, b, \mathrm{T})$ à (b, T) puis de l'état (b, T) à T ou encore passer de l'état $(\mathrm{B}, b, \mathrm{T})$ à T . Ainsi,

$$\begin{aligned} p(\mathrm{T}) &= \frac{9}{8}\times\frac{2}{9}\times\frac{9}{7}\times\frac{1}{9}+\frac{9}{8}\times\frac{2}{9}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{9}{8}\times\frac{4}{9} \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{28}+\frac{1}{16}=\frac{67}{112}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la probabilité qu'il ne reste aucun survivant est

$$p(\varnothing)=1-\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{67}{112}\right)=\frac{15}{112}.$$

Pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité que le combat dure k rounds est égale à

$$\frac{4}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}+\frac{2}{9}\sum_{p=0}^{k-2}\frac{1}{9^p}\left[\left(\frac{2}{9}\right)^{k-2-p}\times\left(1-\frac{2}{9}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2-p}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\right],$$

soit encore

$$\frac{4}{9}\times\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}+\frac{14}{9^k}\left(2^{k-1}-1\right)+\frac{2}{3}\times\frac{1}{9^{k-1}}\times\left(3^{k-1}-1\right).$$

Pour conclure, on calcule l'espérance mathématique du nombre de rounds. Pour $0 < r < 1$, on rappelle les formules suivantes :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kr^{k-1}=\frac{1}{(1-r)^2}$$

et

$$\sum_{k=2}^{+\infty} kr^{k-1}=\frac{2r-r^2}{(1-r)^2}.$$

On en déduit aussitôt

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4k}{9} \times \frac{1}{9^{k-1}} = \frac{4}{9} \times \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{9}{16},$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{14k}{9} \times \left(\frac{2}{9}\right)^{k-1} = \frac{14}{9} \times \frac{32}{49} = \frac{64}{63},$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{14k}{9} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1} = \frac{119}{288},$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2k}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{5}{6},$$

puis

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2k}{3} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1} = \frac{17}{96}$$

Ainsi, la moyenne des nombres de rounds est

$$\frac{9}{16} + \frac{64}{63} - \frac{119}{288} + \frac{5}{6} - \frac{17}{96} = \frac{51}{28} = 1,8214\ldots$$

L'entier le plus proche est 2 (par excès). On peut donc s'attendre à ce que le combat dure deux rounds.

Quelques commentaires sur ce problème.

(1) En discernant de nombreux états intermédiaires dans le combat, **Pierre Renfer** arrive à calculer les probabilités souhaitées sans aucune somme géométrique.

(2) L'auteur de ce problème, **Louis-Marie Bonneval**, propose d'autres approches. L'une d'elle utilise la matrice stochastique

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dont il faut calculer les puissances. Une décomposition par blocs permet ce calcul. Ce calcul matriciel masque en réalité le passage par les séries géométriques et leurs dérivées. Cette approche est également proposée par **François Couloigner**, qui traite les calculs avec le logiciel de calcul formel Maxima et propose une simulation avec le logiciel Python.

(3) Comme la plupart des lecteurs, **Louis-Marie Bonneval** commente l'exercice : le truand, moins habile que les autres, a beaucoup plus de chances qu'eux de gagner le combat. C'est qu'il bénéficie de leur affrontement : il a déjà 44% de chance de gagner dès le premier round, où il n'est pas visé.

(4) Enfin, **Laurent Chéno** propose une démonstration élémentaire (sans dérivation) de l'égalité suivante, valable pour $|a| < 1$:

$$\sum_{n\geq 0} na^n = \frac{a}{(1-a)^2}.$$

Si S_N désigne la somme partielle

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} na^n,$$

un petit calcul montre que

$$\left(1-2a+a^2\right)S_N = a + a^{N+1}\left(Na^2-(N+1)a\right).$$

Un passage à la limite permet de conclure.

Problème 489-1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs (dans $\mathbb{N}$) de n. Si n est divisible par 24, en est-il de même pour $\sigma(n-1)$?

Solutions de Jean-Claude Carréga (Lyon), Bernard Collignon (Lycée Diderot de Narbonne), Jean-Philippe Mouton-Mazerand (Talence), Joël Payen (Gagny), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Xavier Reliquet (Paris).

Pierre Renfer utilise la multiplicativité de la fonction σ: pour deux entiers $a, b \in \mathbb{N}^*$, premiers entre eux, on a la relation

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b).$$

En effet, tout diviseur d de ab s'écrit de manière unique $d = uv$, où u est un diviseur de a et v un diviseur de b. Ainsi, en notant $x \mid y$ la relation x divise y.

$$\sigma(ab) = \sum_{d|ab} d = \sum_{u|a}\sum_{v|b} uv = \sigma(a)\sigma(b)$$

Soit alors un entier n divisible par 24. Ainsi, $n-1$ est congru à -1 modulo 3. Dans la décomposition de $n-1$ en facteurs primaires, figure au moins un facteur p^α, où p est un facteur premier congru à -1 modulo 3 et où α est une puissance impaire. Dans la somme

$$\sigma\left(p^\alpha\right) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha,$$

les termes, en nombre pair, sont alternativement congrus à 1 et -1 modulo 3. Donc $\sigma\left(p^\alpha\right)$ est divisible par 3 et il en est de même de $\sigma(n-1)$. Reste alors à montrer que $\sigma(n-1)$ est divisible par 8.

Puisque n est divisible par 24, l'entier $n - 1$ est congru à -1 modulo 8. Donc, dans la décomposition de $n - 1$ en facteurs primaires, figure

- ou bien un facteur p^α, où p est un nombre premier congru à -1 modulo 8 et α est une puissance impaire,
- ou bien deux facteurs p^α et q^β, où p et q sont des nombres premiers congrus respectivement à 3 et 5 modulo 8 et α et β sont des puissances impaires.

Dans le premier cas, dans la somme

$$\sigma\left(p^\alpha\right) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha$$

les termes, en nombre pair, sont alternativement congrus à 1 et -1 modulo 8, donc $\sigma\left(p^\alpha\right)$ est divisible par 8 et $\sigma(n-1)$ aussi.

Dans le second cas, dans la somme

$$\sigma\left(p^\alpha\right) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha$$

les termes, en nombre pair, sont alternativement congrus à 1 et -1 modulo 4, donc $\sigma\left(p^\alpha\right)$ est divisible par 4. Et la somme

$$\sigma\left(q^\beta\right) = 1 + q + q^2 + \cdots + q^\beta$$

est divisible par 2 puisqu'elle contient un nombre pair de termes impairs. Donc le produit $\sigma\left(p^\alpha\right)\sigma\left(q^\beta\right)$ est divisible par 8. Là encore, $\sigma(n-1)$ est divisible par 8, ce qui conclut.

Dans une toute autre approche, **Jean-Claude Carréga**, **Bernard Collignon**, **Jean-Philippe Mouton-Mazerand**, **Joël Payen** et **Xavier Reliquet** proposent l'idée essentielle de regrouper les diviseurs de $n - 1$ par paires dont la somme est divisible par 24. Les idées proposées sont relativement les mêmes. Voici par exemple celle, plus synthétique, de **Jean-Claude Carréga**.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier divisible par 24. Si un entier naturel x est un diviseur de $n - 1$, il existe un unique diviseur y de $n - 1$ tel que $xy = n - 1$. Les diviseurs x et y sont différents, sinon la relation $n - 1 = x^2$ ferait de -1 un carré modulo 3, ce qui n'est pas le cas. On peut donc regrouper les diviseurs de $n - 1$ par paire $\{x, y\}$ avec $x \neq y$ et $xy = n - 1$. En notant $\{x_1, y_1\}$, … , $\{x_k, y_k\}$ les différentes paires, on obtient

$$\sigma(n-1) = \sum_{i=1}^{k}\left(x_i + y_i\right).$$

Si l'on montre que chaque somme $x_i + y_i$ est divisible par 24, le problème est résolu. Il s'agit maintenant de montrer que, pour $x, y \in \mathbb{Z}$, si $\overline{xy} = -1$ dans l'anneau $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, alors $\overline{x} + \overline{y} = 0$. Or la relation $\overline{xy} = -1$ impose à $\overline{x}$ d'être une des unités de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$. Les unités de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ sont les suivantes :

$$\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}, \overline{19}.$$

Elles vérifient toutes $\bar{x}^2 = 1$ donc $\bar{x}^{-1} = \bar{x}$. Ainsi, si $\bar{x}$, $\bar{y}$ vérifient la relation

$$\overline{xy} = -1$$

alors

$$\bar{y} = -\bar{x}^{-1} = -\bar{x}$$

et donc

$$\bar{x} + \bar{y} = 0.$$

Problème 489-3 (Question de Georges Lion)

Soit E une ellipse de centre O, de foyers F et F′, d'axes de longueurs $2a > 2b$, inscrite dans le parallélogramme ABB′A′, de point de contact avec (AB) noté M tel que $\dfrac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = \tan^2\left(\dfrac{\widehat{\mathrm{A'AB}}}{2}\right)$. On note $d = d(\mathrm{O,AB})$, $c = \mathrm{OF}$, P le cercle de centre O et de rayon a et D le point d'intersection de (FF′) et de la perpendiculaire à (AB) menée par M.

1. Définir un cercle Γ, tangent à (AA′) et (BB′) et tangent extérieurement à E en M. On note C et R le centre et le rayon de Γ et $r = \mathrm{DM}$.
2. Démontrer $ab = d\mathrm{R}$, puis $\mathrm{OC} = a + b$, enfin $\dfrac{r}{\mathrm{R}} = \dfrac{b}{a}$.
3. On mène par M la perpendiculaire à (FF′) qui coupe P en K du même côté de (FF′). Montrer que les points O,K,C sont alignés.
4. Application : l'ellipse E étant définie comme ci-dessus, donner une construction géométrique de ses axes.

Solution de Georges Lion (Wallis)

(1) La perpendiculaire à (AB) menée par M et les bissectrices extérieures des angles $\widehat{\mathrm{BAA'}}$ et $\widehat{\mathrm{ABB'}}$ sont concourantes en vertu de la relation énoncée en hypothèse. D'où le cercle Γ.
Il existe une affinité $\mathcal{A}$ d'axe (AB) telle que $\mathcal{A}(\mathrm{C}) = \mathrm{O}$ et $\mathcal{A}(\Gamma) = \mathrm{E}$ (FIGURE 2).

(2) L'affinité $\mathcal{A}$ préserve la longueur des segments parallèles à (AB) tandis qu'elle multiplie par $\dfrac{d}{\mathrm{R}}$ la longueur des segments perpendiculaires à (AB). À l'aide des aires de l'ellipse et du cercle, on en déduit les relations suivantes :

$$\pi ab = \frac{d}{\mathrm{R}}\pi \mathrm{R}^2,$$

d'où $ab = d\mathrm{R}$.

Soit S (respectivement S′) les projetés de F (respectivement F′) sur (AB) et I le milieu de [SS′]. Il est bien connu que $\mathrm{OS} = \mathrm{OS'} = a$ et $\widehat{\mathrm{FMS}} = \widehat{\mathrm{F'MS'}}$. On en déduit, par produit, les relations suivantes :

$$\frac{\text{MS}}{\text{SF}}=\frac{\text{MS}'}{\text{S}'\text{F}'}=\frac{\text{MS}+\text{MS}'}{\text{SF}+\text{S}'\text{F}'}=\frac{2\sqrt{a^2-d^2}}{2d}$$

et

$$\frac{\text{MS}\times\text{MS}'}{\text{SF}\times\text{S}'\text{F}'}=\frac{a^2-d^2}{d^2}$$

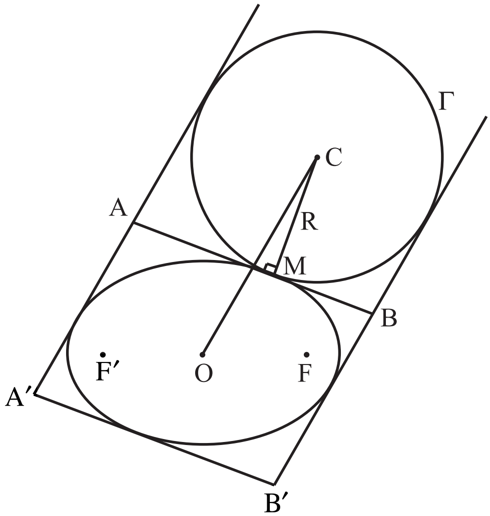

FIGURE 2

Par ailleurs, MS × MS′ = a^2 – OM² et SF × S′F′ = $a^2 - c^2 = b^2$ (puissances).

Donc $a^2-\text{OM}^2=b^2\left(\dfrac{a^2-d^2}{d^2}\right)=\text{R}^2-b^2$.

Finalement,

$$a^2+b^2+2ab=\text{R}^2+2\text{R}d+d^2+\text{IM}^2=(\text{R}+d)^2+\text{IM}^2$$

c'est-à-dire que $a + b$ = OC (FIGURE 3).

La question suivante est évidente lorsque (FF′) est parallèle à (AB). Sinon, soit J l'intersection de (AB) avec (FF′). Le pinceau (MD, MJ, MF, MF′) est harmonique, donc MD est la moyenne harmonique de SF et S′F′ :

$$\frac{2}{\text{MD}}=\frac{1}{\text{SF}}+\frac{1}{\text{S}'\text{F}'}=\frac{\text{S}'\text{F}'+\text{SF}}{\text{S}'\text{F}'\times\text{SF}}=\frac{2\text{IO}}{b^2}$$

d'où

$$r=\frac{b^2}{d}$$

et

$$\frac{r}{\text{R}}=\frac{b^2}{d\text{R}}=\frac{b^2}{ab}=\frac{b}{a}.$$

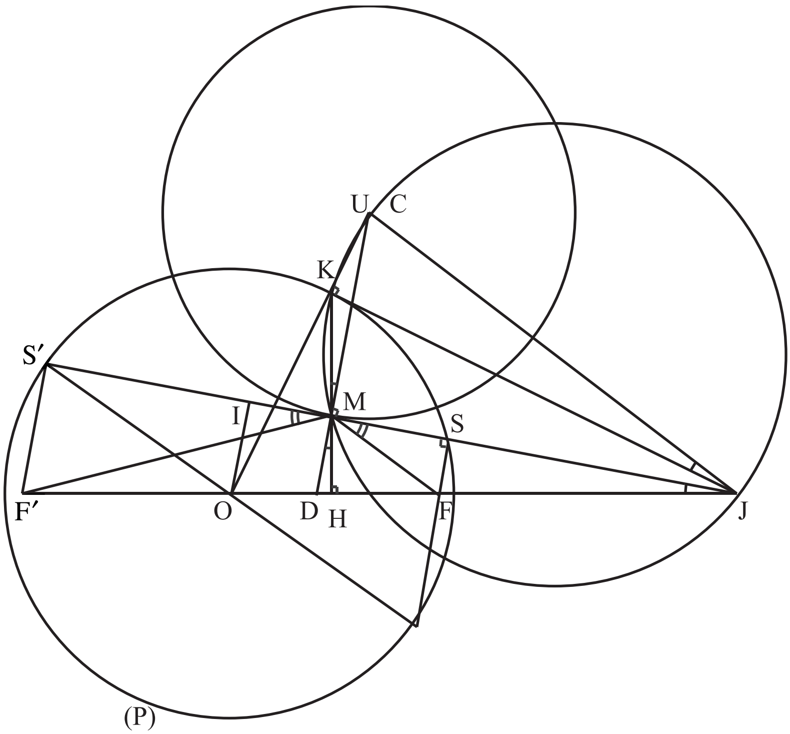

FIGURE 3

(3) Une affinité orthogonale d'axe (FF′) envoie le cercle P sur E, ainsi (JK) est perpendiculaire à (OK). Soit H le projeté de M sur (FF′), U l'intersection de (DM) et de (KO). Les triangles UKJ et DHM sont semblables, donc

$$\frac{\text{UJ}}{\text{KJ}} = \frac{\text{DM}}{\text{HM}}$$

Les triangles KHJ et UMJ sont semblables, donc

$$\frac{\text{UJ}}{\text{KJ}} = \frac{\text{UM}}{\text{KH}}$$

Finalement,

$$\frac{\text{UM}}{\text{DM}} = \frac{\text{KH}}{\text{HM}} = \frac{a}{b} = \frac{\text{CM}}{r}$$

et

$$\text{UM} = \text{CM}.$$

(4) Application : la connaissance de ABB′A′ et de M permet de construire le cercle Γ. Connaissant $a + b$ et ab, des constructions classiques donnent la longueur a. On peut alors tracer le cercle (P) qui coupe en K la droite (OC). La droite (KM) donne la direction du petit axe de E