Exercices de-ci, de-là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

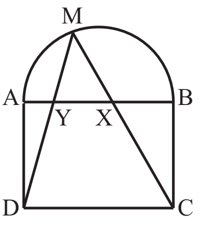
Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par Mél à :
bruno.alaplantive@free.fr
ou par courrier à :
Jean Fromentin,
17 rue de la Roussille,
79000 NIORT

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial, une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 496-1 (Pierre de Fermat – Beaumont de Lomagne)

Sur la figure ci-contre, le rectangle ABCD est tel que $AB = \sqrt{2}AD$.
À partir d'un point M du demi-cercle de diamètre [AB] extérieur au rectangle, on construit les segments [MC] et [MD]. Les points X et Y sont leurs intersections respectives avec le côté [AB].



Prouver que $AX^2 + YB^2 = AB^2$.

Exercice 494-2 (Daniel Reisz – Auxerre) *d'après un exercice proposé par Michel Demazure, dans son Cours d'Algèbre, éditions Cassini*

Une publication médicale annonce un traitement nouveau d'une maladie rare, efficace dans 29,41 %. On sait que les malades qui ont fait l'objet de cet essai clinique étaient moins nombreux que 100.
Donner un nombre possible.
(On peut aussi proposer un algorithme renvoyant toutes les réponses possibles inférieures à 100).

Exercice 496-3 (Louis-Marie Bonneval – Poitiers)

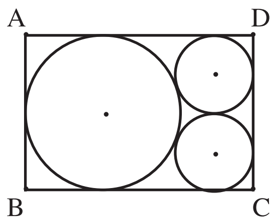
Cette photo représente un escalier en colimaçon vu d'en bas.
On a l'impression de voir une spirale. Est-ce le cas ?

Exercice 496-4 (Frédéric de Ligt – Montguyon)

Un quadrilatère convexe, dont les côtés et les diagonales sont rationnels, est divisé par ses diagonales en quatre triangles.
Prouver que les côtés de chacun de ceux-ci sont rationnels.

Solutions

Exercice 494-1 (Daniel Reisz – Auxerre) *à proposer à nos élèves de collège*



Un rectangle ABCD a pour largeur AB = 4 et contient trois cercles tangents entre eux et aux cotés du rectangle comme indiqué sur la figure ci-contre. Quelle est sa longueur ?

Solution de François Drouin (IUFM de Lorraine)

Je me suis convaincu que les trois centres des cercles formaient les sommets d'un triangle isocèle dont je savais trouver les longueurs des trois côtés. Je saurai calculer la hauteur de ce triangle issue du sommet principal et je saurai en déduire la longueur du rectangle. Pour moi, le problème est résolu.

Autres solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Jean-Claude Carréga (Lyon), Robert Bourdon (Tourgeville), Frédéric de Ligt (Montguyon), Jean Gounon (Chardonnay).

Nota. La réponse est $3+2\sqrt{2}$.

Remarque. Dans la réponse qu'il fournirait à ses étudiants de Master préparant le professorat des écoles, François Drouin décide volontairement de ne pas aborder les considérations de symétrie de la figure, qui vont relever de la géométrie perceptive, alors qu'il lui faut travailler la géométrie déductive avec eux. S'ensuit une longue démonstration qui n'a pas d'autre but, en se montrant indigeste, que de poser la question de ce qui est vraiment attendu, <u>à l'écrit</u>, d'un élève de collège.
Il indique par ailleurs qu'en Allemagne, beaucoup de choses passent par l'oral…

Exercice 494-2 (Ali Akir – Tunis)

Trouver le terme général de la suite u dans chacun des cas suivants :

a) $p \in \mathbb{N}$; u est définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n + p \cdot \mathrm{E}(u_n) \end{cases}$$

où $\mathrm{E}(u_n)$ désigne la partie entière de u_n.

b) u est définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = u_n + 2 - \cos(\pi u_n) \end{cases}$

c) p et q sont des entiers naturels ;

u est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \begin{cases} p + u_n, \text{ si } u_n \text{ est pair} \\ q + u_n, \text{ si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

Solution de Jean-Yves LeCadre (Saint Avé)

a) Posons $\mathrm{E}(u_0) = k$. Quelques termes suggèrent que pour tout n,

$$u_n = u_0 + k\left[(1+p)^n - 1\right]$$

qui est vrai pour $n = 0$.
Supposons le au rang n. Alors,

$$u_{n+1} = u_n + p\mathrm{E}(u_n).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\mathrm{E}(u_n) = \mathrm{E}(u_0) + k\left[(1+p)^n - 1\right]$$

car $k\left[(1+p)^n - 1\right]$ est entier. Donc $\mathrm{E}(u_n) = k(1+p)^n$.
On en déduit que

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_0 + k\left[(1+p)^n - 1\right] + pk(1+p)^n \\ &= u_0 + k\left[(1+p)^n - 1 + p(1+p)^n\right] \\ &= u_0 + k\left[(1+p)^{n+1} - 1\right] \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout n,

$$u_n = u_0 + \mathrm{E}(u_0)\left[(1+p)^n - 1\right].$$

b) Les u_n sont entiers et alternent pairs et impairs. Montrons par récurrence que pour tout n,

$$u_{2n} = 2 + 4n,$$

qui est vrai pour $n = 0$. Supposons-le au rang n. Alors,

$$u_{2n+1} = 2 + 4n + 2 - 1 = 3 + 4n,$$

et

$$u_{2(n+1)} = 3 + 4n + 2 + 1 = 2 + 4(n + 1).$$

Pour tout n, on a donc bien $u_{2n} = 2 + 4n$.
On en déduit alors que pour tout n, $u_{2n+1} = 3 + 4n$ est aussi vrai.

c) 1) Supposons u_0 pair.
Si p est pair, tous les u_n sont pairs : la suite est arithmétique et pour tout n,

$$u_n = u_0 + np.$$

Si p est impair,
si q est pair, tous les u_n à partir de u_1 sont impairs. La suite à partir de u_1 est arithmétique de raison q. Donc pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = u_0 + p + (n - 1)q.$$

Si q est impair, la suite alterne pairs et impairs. Supposons u_{2n} pair, ce qui est vrai pour u_0. Alors

$$u_{2n+1} = u_{2n} + p$$

et

$$u_{2(n+1)} = u_{2n} + p + q,$$

qui est pair. La suite des u_{2n} est arithmétique, donc pour tout n :

$$u_{2n} = u_0 + n\,(p + q)$$

et, u_0 et $p + q$ étant pairs, pour tout n,

$$u_{2n+1} = u_0 + (n + 1)\,p + nq.$$

2) Si u_0 est impair, les parités changent, et il suffit de permuter p et q pour obtenir les formules correspondantes ; à savoir successivement

$$u_n = u_0 + nq,$$
$$u_n = u_0 + q + (n - 1)p,$$

etc.

Autres solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Jean-Claude Carréga (Lyon), Robert Bourdon (Tourgeville), Frédéric de Ligt (Montguyon), Éric Oswald (Borgo).

Exercice 494-3 Arithmétique *(d'après les olympiades mathématiques de l'Union Soviétique 1962)*

x, y et z désignent des entiers tous distincts.
Montrer que $(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$ est divisible par $5\,(x - y)\,(y - z)\,(z - x)$.

Solution de Pierre Lapôtre (Calais)

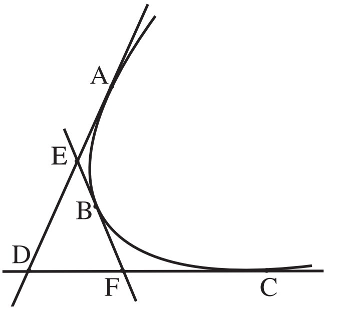
On note $x - y = a$, $y - z = b$, donc $z - x = -\,(a + b)$.
$(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$ s'écrit alors $a^5 + b^5 - (a + b)^5$.
Après développement du binôme de Newton il vient :

$$\begin{aligned}
a^5 + b^5 - (a+b)^5 &= -\left(5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4\right)\\
&= -5ab\left(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3\right)\\
&= -5ab\left(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - a^2b - ab^2\right)\\
&= -5ab\left((a+b)^3 - ab(a+b)\right)\\
&= -5ab(a+b)\left((a+b)^2 - ab\right)\\
&= -5ab(a+b)\left(a^2 + ab + b^2\right),
\end{aligned}$$

ce qui, en revenant aux notations initiales, montre que $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ est bien divisible par $5\,(x-y)\,(y-z)\,(z-x)$.

Autres solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Jean-Yves LeCadre (Saint Avé), Jean-Claude Carréga (Lyon), Frédéric de Ligt (Montguyon), Robert Bourdon (Tourgeville), Raymond Heitz (Lavergne).

Exercice 494-4 Jean-Pierre Friedelmeyer (Osenbach) *(d'après August Ferdinand Möbius)*



Soient A, B, C trois points consécutifs d'une parabole (P). Les tangentes à la parabole en A et C se coupent en D, celles en A et B se coupent en E, celles en B et C se coupent en F.
En notant KLM l'aire du triangle de sommets K, L, M et (KL) l'aire du segment de parabole limité par (P) et le segment de droite [KL], démontrer les trois relations :

a) $\sqrt[3]{\mathrm{ADC}}=\sqrt[3]{\mathrm{AEB}}+\sqrt[3]{\mathrm{BFC}}$

b) $\sqrt[3]{(\mathrm{AC})}=\sqrt[3]{(\mathrm{AB})}+\sqrt[3]{(\mathrm{BC})}$

c) $\mathrm{ABC}=3\cdot\sqrt[3]{(\mathrm{AB})}\cdot\sqrt[3]{(\mathrm{BC})}\cdot\sqrt[3]{(\mathrm{CA})}$

Solution de Frédéric de Ligt (Montguyon)

Pour faciliter les écritures j'ai changé A, B et C en A_1, A_2 et A_3.

Démonstration analytique.

On choisit un repère orthonormé tel que les points de la parabole (P) aient pour coordonnées $\left(x,ax^2\right)$ avec $a>0$.

Pour $i=1$, 2 ou 3, on note $\left(x_i,ax_i^2\right)$ les coordonnées du point A_i de la parabole (P), avec $x_1<x_2<x_3$.

On note d_i la tangente en A_i à (P), son équation est $y=2ax_ix-ax_i^2$.
Les coordonnées de E, intersection de d_1 et d_2 se calculent facilement : $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},ax_1x_2\right)$.

De même on trouve F $\left(\dfrac{x_2+x_3}{2},ax_2x_3\right)$ et D $\left(\dfrac{x_3+x_1}{2},ax_3x_1\right)$.

a) On a

$$\mathrm{A_1DA_3} = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{A_1D}}, \overrightarrow{\mathrm{A_1A_3}}\right)\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|\left(\frac{x_3 - x_1}{2}\right)\left(ax_3^2 - ax_1^2\right) - \left(ax_1x_3 - ax_1^2\right)\left(x_3 - x_1\right)\right| = \frac{a\left(x_3 - x_1\right)^3}{4}.$$

De même on trouve :

$$\mathrm{A_1EA_2} = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{A_1E}}, \overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}\right)\right| = \frac{a\left(x_2 - x_1\right)^3}{4}$$

et

$$\mathrm{A_2FA_3} = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{A_2F}}, \overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}}\right)\right| = \frac{a\left(x_3 - x_2\right)^3}{4}.$$

On a alors les égalités $\sqrt[3]{\mathrm{A_1DA_3}} = \sqrt[3]{\frac{a}{4}}\left(x_3 - x_1\right)$, $\sqrt[3]{\mathrm{A_1EA_2}} = \sqrt[3]{\frac{a}{4}}\left(x_2 - x_1\right)$ et $\sqrt[3]{\mathrm{A_2FA_3}} = \sqrt[3]{\frac{a}{4}}\left(x_3 - x_2\right)$. On a bien

$$\sqrt[3]{\mathrm{A_1DA_3}} = \sqrt[3]{\mathrm{A_1EA_2}} + \sqrt[3]{\mathrm{A_2FA_3}}.$$

b) L'aire sous le segment $\left[\mathrm{A_1A_2}\right]$. est l'aire d'un trapèze de hauteur $\left(x_2 - x_1\right)$, de petite base ax_1^2. et de grande base ax_2^2 ; l'aire sous la parabole entre $\mathrm{A_1}$ et $\mathrm{A_2}$ vaut $\frac{ax_2^3}{3} - \frac{ax_1^3}{3}$.

Le calcul de l'aire $\left(\mathrm{A_1A_2}\right)$: $\frac{\left(x_2 - x_1\right)\left(ax_1^2 + ax_2^2\right)}{2} - \left(\frac{ax_2^2}{3} - \frac{ax_1^2}{3}\right) = a\frac{\left(x_2 - x_1\right)^3}{6}$.

De même on obtient l'aire $\left(\mathrm{A_2A_3}\right)$: $a\frac{\left(x_3 - x_2\right)^3}{6}$ et celle de $\left(\mathrm{A_1A_3}\right)$: $a\frac{\left(x_3 - x_1\right)^3}{6}$.

On a les égalités $\sqrt[3]{\left(\mathrm{A_1A_3}\right)} = \sqrt[3]{\frac{a}{6}}\left(x_3 - x_1\right)$, $\sqrt[3]{\left(\mathrm{A_1A_2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{a}{6}}\left(x_2 - x_1\right)$ et $\sqrt[3]{\left(\mathrm{A_2A_3}\right)} = \sqrt[3]{\frac{a}{6}}\left(x_3 - x_2\right)$. On a bien alors

$$\sqrt[3]{\left(\mathrm{A_1A_3}\right)} = \sqrt[3]{\left(\mathrm{A_1A_2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\mathrm{A_2A_3}\right)}.$$

c) On a

$$\mathrm{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}, \overrightarrow{\mathrm{A_1A_3}}\right)\right| = a\frac{\left(x_2 - x_1\right)\left(x_3 - x_2\right)\left(x_3 - x_1\right)}{2}.$$

Par ailleurs :

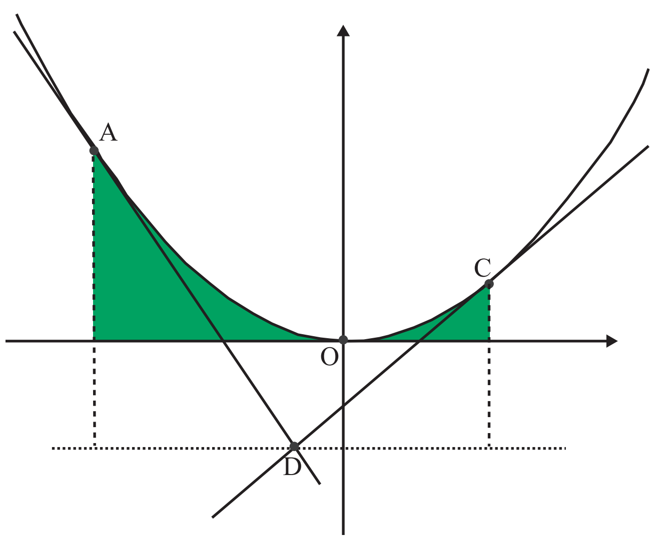
$$\sqrt[3]{(A_1A_2)}\sqrt[3]{(A_2A_3)}\sqrt[3]{(A_1A_3)} = \sqrt[3]{\frac{a}{6}}(x_2 - x_1)\sqrt[3]{\frac{a}{6}}(x_3 - x_2)\sqrt[3]{\frac{a}{6}}(x_3 - x_1)$$
$$= a\frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)}{6}.$$

d'où le résultat

$$A_1A_2A_3 = 3 \cdot \sqrt[3]{(A_1A_2)}\sqrt[3]{(A_2A_3)}\sqrt[3]{(A_1A_3)}.$$

Autres solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Jean-Claude Carréga (Lyon), Éric Oswald (Borgo), Robert Bourdon (Tourgeville), Pierre Lapôtre (Calais), Michel Sarrouy (Mende), Christophe Brighi (?).

Remarque. Robert Bourdon propose une démonstration qui se passe des déterminants mais utilise la primitive $F(x) = k\,x^3/3$ pour le calcul de l'aire verte sous la parabole d'équation $y = k\,x^2$, qui permet alors le calcul du segment de parabole (AC).



Je n'ai pas reçu de démonstration purement géométrique comme Pierre Lapôtre aurait aimé en trouver une.