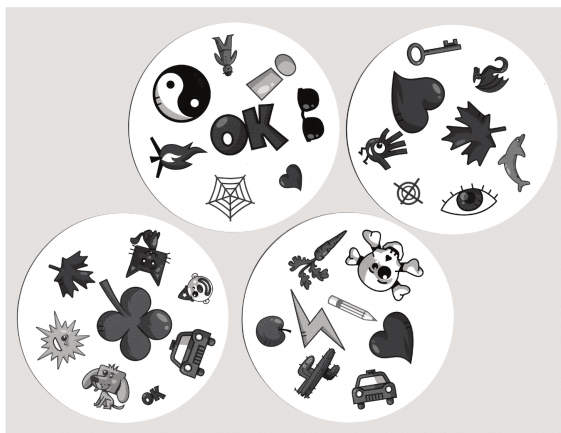


# Dobble ou le plan projectif dans sa poche

Thierry Lambre<sup>(\*)</sup>

## 1. Le jeu Dobble

Le jeu « Dobble » est constitué de cartes comportant chacune des figures dessinées. Les règles précises nous importent assez peu, elles suffisent à combler de joie les enfants à partir de 6 ans, le jeu consistant à reconnaître de diverses façons mais toujours le plus rapidement possible le dessin commun à deux cartes<sup>(1)</sup>.



Quelques cartes du jeu Dobble

Les concepteurs du jeu ont fait en sorte que les cartes et figures du jeu satisfassent les propriétés suivantes :

Dobble 1 : Deux figures distinctes étant données, il existe au plus une carte possédant ces deux figures.

Dobble 2 : Deux cartes distinctes étant données, elles ont toujours en commun une figure et une seule.

Dobble 3 : Sur une même carte, il y a exactement 8 figures distinctes.

Dobble 4 a : Chaque figure apparaît au plus sur 8 cartes distinctes.

Dobble 4 b : Au moins une figure est présente sur 8 cartes.

Ces règles ont les deux conséquences immédiates suivantes :

*Le jeu possède nécessairement au moins 57 figures distinctes et au plus 57 cartes.*

(\*) Université B. Pascal, Laboratoire de mathématiques, UMR 6620 CNRS, 24, avenue des Landais, 63177, Aubière Cedex, [thierry.lambre@math.univ-bpclermont.fr](mailto:thierry.lambre@math.univ-bpclermont.fr)

(1) Pour mesurer les qualités de rapidité nécessaires, faire une partie virtuelle sur le site : <http://www.playfactory.fr/dobble/>

En effet, soit donnée une figure à 8 occurrences (Dobble 4 b). Il y a sur chacune des 8 cartes celle contenant 7 autres figures (Dobble 3) toutes deux à deux distinctes (Dobble 2). Il y a donc au moins  $8 \times 7 + 1$  figures.

Soit à présent donnée une carte. Chacune des 8 figures de cette carte (Dobble 3) apparaît sur au plus 7 autres cartes (Dobble 4 a), ce qui fournit au plus  $8 \times 7$  autres cartes deux à deux distinctes (Dobble 1), à laquelle il faut ajouter la carte initiale. Toute carte du jeu est dans ce paquet de  $8 \times 7 + 1$  cartes car toute carte du jeu possède une figure en commun avec la carte initialement donnée (Dobble 2).

On vérifie que le jeu de cartes Dobble possède 55 cartes et 57 figures. Nous eussions nettement préféré que ce jeu comportât 57 cartes et 57 figures. Voici pourquoi et comment faire.

## 2. Ajout de deux cartes au jeu proposé par le fabricant

Modifions les propriétés Dobble 1 à Dobble 4 énumérées ci-dessus, où seul l'adverbe « exactement » est substitué à l'expression « au plus » dans les propriétés Dobble 1 et Dobble 4 a.

Ceci donne les quatre propriétés suivantes d'un jeu virtuel :

P1 : Deux figures distinctes étant données, il existe exactement une carte possédant ces deux figures.

P2 : Deux cartes distinctes étant données, elles ont toujours en commun une figure et une seule.

P3 : Sur une même carte, il y a exactement 8 figures distinctes.

P4 : Chaque figure apparaît sur exactement 8 cartes distinctes.

Par un raisonnement analogue à celui que nous venons de mener, il est facile de vérifier<sup>(2)</sup> que ce jeu de Dobble virtuel, s'il existe, posséderait nécessairement exactement 57 cartes et 57 figures.

Existe-t-il un tel jeu ? Peut-on le construire à partir du jeu, bien réel celui-là, que la société Dobble fournit ? Sommes-nous en mesure de préciser les deux cartes manquantes de notre jeu, pour l'instant virtuel ?

Pour répondre à tout cela, tenons le raisonnement suivant<sup>(3)</sup>. Il est facile d'observer que dans le jeu Dobble :

- 42 figures apparaissent 8 fois sur les différentes cartes,
- 14 figures n'apparaissent que 7 fois,
- une figure n'apparaît que 6 fois.

Supposons qu'il existe un jeu de 57 cartes satisfaisant les propriétés P1 à P4 ci-dessus et dont les 55 premières cartes soient celles proposées par le jeu Dobble.

(2) Le faire !

(3) J'ignore si tous les jeux Dobble vendus dans le commerce sont constitués des mêmes cartes ornées des mêmes figures. Un doute subsiste car sur le site du jeu cité plus haut, d'autres figures que celles présentes dans l'unique jeu dont je dispose apparaissent. Le raisonnement proposé ici s'appuie évidemment sur le jeu dont je dispose mais il s'adaptera sans difficulté à toute autre situation.

La seule figure n'apparaissant que 6 fois est le « Bonhomme de neige ». Chacune des deux nouvelles cartes, numérotées 56 et 57, comportera donc nécessairement ce « Bonhomme de neige », ceci pour que la figure « Bonhomme de neige » apparaisse bien 8 fois. Puisque deux cartes ne peuvent avoir qu'une figure en commun, ces deux cartes ne peuvent plus avoir aucune autre figure en commun.

Pour continuer le raisonnement, il est nécessaire de disposer de la liste des 14 figures n'apparaissant que 7 fois ; cette liste, digne d'un inventaire de Prévert, est la suivante : « Ampoule », « ! », « Œil », « Tête de mort », « STOP », « Coccinelle », « Chien », « Glaçon », « Cactus », « Feuille d'érable », « Marguerite », « Tyrannosaure », « ? », « Borgne au chapeau melon ».

Une carte parmi les cartes 56 et 57 contient donc nécessairement ce « Borgne au chapeau melon ». Décidons qu'il s'agit de la carte 56. On observe alors que les 7 cartes parmi celles de numéros 1 à 55 ayant le « Borgne au chapeau melon » comportent les figures suivantes mais jamais sur la même carte : « Ampoule », « ! », « Œil », « Tête de mort », « STOP », « Coccinelle », « Chien ». Puisque deux cartes ne doivent jamais avoir plus d'une figure en commun, aucune de ces 7 figures ne peut être sur la carte 56. On complète nécessairement la carte numéro 57 par ces 7 figures, à savoir « Ampoule », « ! », « Œil », « Tête de mort », « STOP », « Coccinelle », « Chien ». La carte numéro 56, sur laquelle sont déjà présentes les figures « Bonhomme de neige » et « Borgne au chapeau melon » contient donc nécessairement les 6 figures qui restent, c'est-à-dire « Cactus », « Feuille d'érable », « Marguerite », « Tyrannosaure », « ? », « Glaçon ». Il est évident que ces conditions nécessaires s'avèrent suffisantes.



Les deux cartes qu'aucun jeu ne possède.

On dispose à présent d'un jeu de 57 cartes proposant 57 figures, ce jeu satisfaisant aux propriétés P1 à P4 ci-dessus.

Le tour est joué : sans le savoir vous avez un plan projectif en main et vous venez de faire de la géométrie projective<sup>(4)</sup> !

(4) Dans une classe, les divers raisonnements des paragraphes 1 et 2 par conditions nécessaires, ou par conditions nécessaires et suffisantes pourraient sans aucun doute faire l'objet d'une belle activité de géométrie hors les murs, valorisant les compétences complexes que seule la géométrie sait si bien mettre en œuvre dans l'enseignement secondaire (fin d'un bref, mais ferme plaidoyer pour une présence substantielle de la géométrie dans les classes...).

### 3. Dobble comme modèle d'un plan projectif

Comme l'a remarqué M. Bourrigan [B], le géomètre reconnaît dans les règles P1 à P4 des propriétés d'incidence qui concernent la géométrie projective d'un plan fini. Essayons d'expliquer cela.

Dans une vision axiomatique de la géométrie, on sait depuis Euclide et encore plus depuis Hilbert que les objets importent peu et que ce sont les relations entre objets qui sont importantes. La boutade de Hilbert

*« On doit toujours pouvoir dire – à la place de points, droites et plan – table, chaise et bock à bière »*

est célèbre, mais peut-être l'extrait suivant de la correspondance de Hilbert à Frege est-il moins connu :

*« Vous dites que mes concepts, par exemple “ point ”, “ entre ”, ne sont pas univoquement définis. Mais il est bien évident que chaque théorie n'est qu'un échafaudage ou un schéma de concepts avec leurs relations réciproques nécessaires, et que les éléments de base peuvent être conçus de n'importe quelle manière. Si je vois dans mes points un système quelconque de choses, par exemple le système de l'amour, de la loi, ou du ramoneur..., et qu'alors je conçois tous mes axiomes comme des relations entre ces choses, alors mes théorèmes, par exemple celui de Pythagore, vaudront aussi pour ces choses. »<sup>(5)</sup>*

Fort de cette caution du géomètre d'une grande autorité qu'est Hilbert, le lecteur peut consulter l'audacieux dictionnaire analogique suivant :

jeu de cartes Dobble : plan

figure : point du plan

carte du jeu : droite du plan

la figure est représentée sur la carte : le point appartient à la droite.

En appliquant les termes de ce dictionnaire analogique aux propriétés P1 à P4, nous obtenons les propriétés suivantes (PP = Plan Projectif)

PP1 : Deux points étant donnés, il passe une unique droite par ces deux points.

PP2 : Deux droites distinctes sont toujours concourantes.

PP3 : Chaque droite possède exactement 8 points.

PP4 : Chaque point est point de concours de 8 droites exactement.

Nous sommes désormais dans un cadre géométrique. Commentons chacune de ces quatre propriétés dont seule la première est familière.

PP1 : Depuis Euclide, on sait que par deux points d'un plan affine, il passe une droite et une seule. C'est le contenu géométrique de la propriété PP1, qui est une propriété de géométrie affine que tous, de la maternelle à l'université, nous acceptons sans réserve.

(5) Lettre de Hilbert à G. Frege du 29/12/99, citée dans [R-R], p. 228. Je remercie S. Gandon (Université B. Pascal) de m'avoir communiqué cette référence.

PP2 : Cette propriété est nettement plus surprenante que la propriété d'Euclide PP1. Elle est souvent perçue comme déroutante de prime abord et ce n'est pas sans raison. Des générations de mathématiciens ont essayé bien des vicissitudes avant de rendre rigoureuse l'intuition qu'en géométrie plane, deux droites parallèles se rencontrent en un point situé sur une mystérieuse droite à l'infini. L'histoire de cette droite à l'infini mêle géométrie, architecture et beaux-arts au travers des notions de perspective et de ligne de fuite<sup>(6)</sup>. Depuis Desargues, les mathématiciens savent que

*deux droites d'un plan projectif sont toujours sécantes.*

La propriété PP2 est la propriété projective par excellence. Dans un plan projectif, la notion de droites parallèles a disparu, toutes les droites se rencontrent « sur la droite à l'infini ». La mise en forme axiomatique de cette formulation ici un peu vague a pris un certain temps. Il suffit aujourd'hui de lire un chapitre d'un cours de géométrie projective pour donner un sens précis à tout cela.

PP3 et PP4 : Ce sont des propriétés de géométrie finie sur lesquelles nous reviendrons dans quelques instants.

En lisant ce dictionnaire en sens inverse, Dobble devient un modèle très concret d'un plan projectif fini dans lequel toutes les relations d'incidence sont visualisées par les cartes et figures présentes sur chacune des cartes. Au lieu de dire que deux droites sont toujours sécantes, on dit que deux cartes ont toujours une figure commune.

Ayant en tête qu'il existe un certain plan projectif fini possédant 57 droites, dans lequel chaque droite possède 8 points, dans lequel chaque point est point de concours de 8 droites, le géomètre pouvait affirmer, sans grand talent divinatoire, qu'il fallait compléter le jeu Dobble en lui adjoignant deux cartes.

Soulignons combien les relations d'incidence d'un plan projectif fini sont difficiles à réaliser<sup>(7)</sup> sans utiliser l'outillage mathématique des plans projectifs (les coordonnées homogènes des points et les équations homogènes des droites). Les concepteurs de Dobble ont peut-être raisonné à tâtons sans avoir vraiment ce plan projectif en tête car d'infimes oublis<sup>(8)</sup> sont présents. Les concepteurs ont cependant bien travaillé car, par chance<sup>(9)</sup>, il a suffi de compléter Dobble avec deux cartes (c'est-à-dire ajouter les deux droites manquantes) tout en respectant les incidences déjà présentes pour aboutir à une représentation cette fois très fidèle d'un plan projectif fini.

#### 4. D'autres jeux de cartes et d'autres plans projectifs finis ?

La nature mathématique est assez généreuse mais assez espiègle : il existe une infinité de plans projectifs finis mais ils sont bien cachés<sup>(10)</sup>.

6) Voir par exemple l'ouvrage [D] rédigé par un historien de l'art, et [P] rédigé par une historienne des sciences.

(7) Pour s'en convaincre, il suffit d'essayer de représenter les relations d'incidence de quelques cartes du jeu Dobble sur des points et des droites usuelles. On aboutira assez vite à un gribouillis inexploitable.

(8) Mais aucune erreur !

(9) Cette chance ne peut pas être totalement fortuite. La combinatoire d'un plan fini est trop contraignante pour qu'on y aboutisse par hasard.

(10) C'est là l'origine de la géométrie finie, très féconde au début du XX<sup>e</sup> siècle, voir [G].

Soit  $p$  un nombre premier et soit  $q = p^n$  une puissance de ce nombre premier. Posons  $N = q^2 + q + 1$  et  $k = q + 1$ . Il existe un plan projectif composé de  $N$  points et  $N$  droites satisfaisant les propriétés PP1 et PP2 ci-dessus. De plus, chaque droite possède  $k$  points et chaque point est point de concours de  $k$  droites.

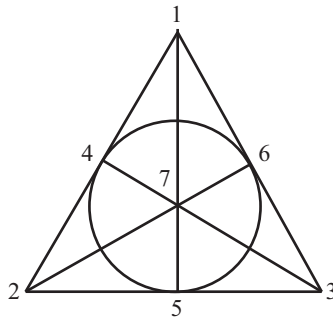
Cet énoncé peut paraître à bon droit un peu obscur car ni les points, ni les droites n'y sont correctement définis<sup>(11)</sup> mais seules les relations d'incidence entre ces deux types d'objets l'ont été. On retrouve la démarche de Hilbert : qu'importe les objets pourvu qu'on dispose des relations précises entre ces objets.

• **Le nombre premier  $p = 2$ .**

Si  $p = 2$ ,  $N = 7$ ,  $k = 3$ . Le plan projectif obtenu peut-être présenté sous la forme du jeu suivant :

Comment compléter 7 cartes d'un jeu en disposant de 7 figures distinctes sachant qu'on exige que chaque carte comporte 3 figures distinctes et que deux cartes quelconques aient toujours une seule figure en commun ?

Lorsque vous aurez réussi à constituer ce jeu de cartes, vous aurez en main le plan projectif de Fano, qui est le plus petit plan projectif fini. Ce plan admet la représentation graphique suivante pour laquelle nous laissons au lecteur le soin de détailler la liste des 7 droites :



Le plan projectif de Fano.

• **Le nombre premier  $p = 3$ .**

Ici,  $p = 3$ ,  $N = 13$  et  $k = 4$ . Ce plan répond à la question suivante :

Comment compléter 13 cartes d'un jeu en disposant de 13 figures distinctes sachant qu'on exige que chaque carte comporte 4 figures distinctes et que deux cartes quelconques aient toujours une seule figure en commun ?

Pour réaliser ce jeu, il peut être commode de s'aider d'une représentation graphique de ce plan fini à 13 points et 13 droites. Les points sont numérotés de 1 à 13. Chaque droite possède 4 points. Les droites sont les 13 ensembles de 4 points énumérés ci-dessous :

en noir :

$\{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\{1, 5, 9, 13\}$ ,  $\{1, 6, 8, 11\}$ ,  $\{1, 7, 10, 12\}$ ,

(11). Pour cela, il faut un peu d'algèbre linéaire et la notion de coordonnées homogènes.

en gris :

$\{2, 5, 11, 12\}, \{2, 6, 10, 13\}, \{2, 7, 8, 9\},$

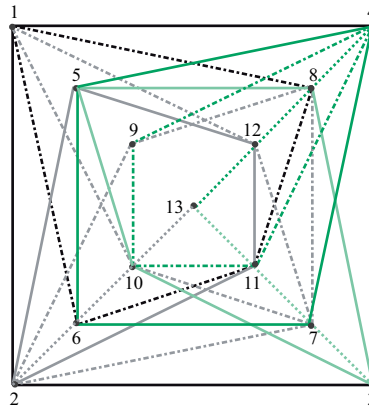
en vert pâle :

$\{3, 5, 8, 10\}, \{3, 7, 11, 13\}, \{3, 6, 9, 12\},$

en vert foncé :

$\{4, 5, 6, 7\}, \{4, 8, 12, 13\}, \{4, 9, 10, 11\}.$

Dans ce plan, chaque point est point de concours de 4 droites ; par deux points passe une seule droite ; deux droites sont toujours sécantes (c'est un plan projectif !).



Le plan projectif à 13 points.

Les 13 points sont représentés sur la figure ci-dessus. Pour représenter les 13 droites, il faut être plus soigneux. Les 4 droites passant par le point 1 sont en noir, 3 droites passant par le point 2 sont en gris, 3 droites passant par le point 3 sont en vert pâle, et 3 droites passant par le point 4 sont en vert foncé. Pour bien suivre chacune des droites d'une même couleur (4 pour la couleur noire, 3 pour les autres couleurs), il faut encore distinguer 4 types de traits pour chaque couleur, ce qui est fait sur la figure (traits pleins, pointillés, etc.). Chacun des 13 points de la figure est alors point de concours de 4 droites de 4 couleurs distinctes choisies parmi 13. C'est le sens des divers pointillés proposés.

Pour résoudre l'exercice proposé, on numérote les 13 figures choisies de 1 à 13, chaque droite du graphique ci-dessus est une carte. Pour connaître les figures d'une carte donnée, on suit les numéros des points passant sur une droite et on met les figures correspondantes sur cette carte.

• **Le nombre premier  $p = 7$ .**

C'est le jeu Dobble enrichi de ses deux cartes supplémentaires ( $p = 5, N = 57$  et  $k = 8$ ) !

Inutile de chercher une autre représentation visuelle de ce plan projectif. Dobble sera très certainement beaucoup plus simple que n'importe quelle tentative de ce genre...

**Remerciements :** au prestidigitateur Jean Fromentin pour la présence de cartes, réelles ou pas, du jeu Dobble au sein de ce texte.

## Bibliographie

[B], M. Bourrigan, *Dobble et la géométrie finie*, 2011, <http://Images.math.cnrs.fr>

[D], H. Damish, *L'origine de la perspective*, Flammarion, 1987.

[G] Sébastien Gandon, *Entre figures et espaces : le cas des diagrammes en géométrie finie*, 2009, <http://Images.math.cnrs.fr>

[P], J. Peier, L'histoire de la perspective au XXIème siècle : une déconstruction. *La Gazette de la SMF*, 78, Octobre 1998.

[R-R], Ph. Rivenc & F. de Rouilhan, *Logique et fondements des mathématiques, anthologie 1850-1914*), éd. Payot.