

Triangles et parallélogrammes

Pierre Legrand¹

Les exercices assemblés ici partent de la question suivante : étant donné un triangle et un parallélogramme, si un des deux est inclus dans l'autre, que dire de leurs aires ?

Les deux premières parties résolvent ce problème, la troisième étend les résultats obtenus aux quadrilatères convexes, la quatrième (la seule à utiliser autre chose que les connaissances du collège) porte sur les polygones convexes en général.

Certains de ces énoncés ont beaucoup traîné, d'autres sont peu connus.

Dans tout ce qui suit, les mots « triangle », « parallélogramme », « quadrilatère », « polygone » désignent la portion de plan ainsi délimitée, pourtour compris.

1. Triangle inclus dans un parallélogramme

Théorème 1

Tout triangle est inclus dans un parallélogramme d'aire double. Tout parallélogramme contient un triangle d'aire moitié.

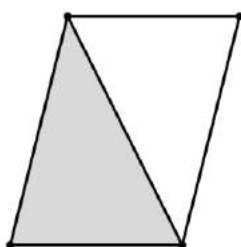


fig. 1a

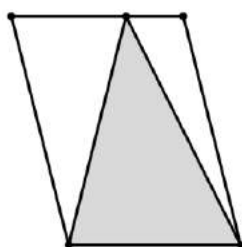


fig. 1b

Plutôt que d'écrire des démonstrations en forme, nous donnons ci-contre des figures qui nous semblent parler d'elles-mêmes (la figure 1a prouve l'existence d'une solution, la figure 1b sa non-unicité).

Nous allons montrer maintenant que ces théorèmes ne sont pas améliorables. Plus précisément :

Théorème 2

Tout parallélogramme contenant un triangle a une aire au moins double de celle de ce dernier. Tout triangle inclus dans un parallélogramme a une aire au plus égale à la moitié de celle de ce dernier.

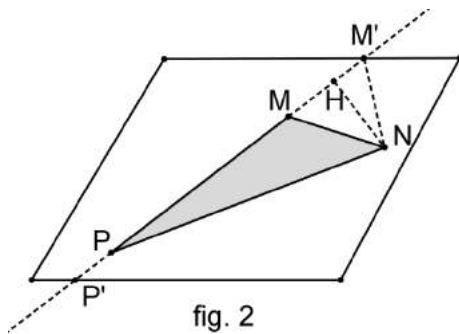
Ces deux résultats, manifestement équivalents, sont moins simples à établir que les précédents ; il va falloir procéder par étapes.

Soit donc un parallélogramme $ABCD$ d'aire S , que nous appellerons (Π) , et un triangle MNP , que nous appellerons (T) , inclus dans (Π) .

¹ p.m.legrand@sfr.fr

Premier cas : un au moins des sommets de (T) est intérieur à (Π)

Supposons M intérieur à (Π) . La droite (PM) coupe le parallélogramme en deux points M' et P' tels

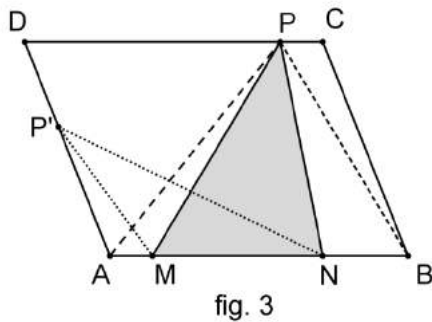


que $[PM] \in [P'M']$. Les triangles MNP et $M'NP$ ont même hauteur NH , mais $MP < M'P$ et donc l'aire de MNP est strictement inférieure à celle du triangle $M'NP$.

On vient donc de prouver que, si un au moins des sommets de (T) est intérieur à (Π) , il existe un triangle inclus dans (Π) , ayant un sommet de plus sur le pourtour de (Π) et dont l'aire est strictement plus grande que celle de (T) .

La recherche des triangles d'aire maximum inclus dans (Π) peut donc se limiter à ceux dont les trois sommets sont sur le pourtour de (Π) .

Second cas : (T) a deux sommets sur un côté de (Π), le troisième étant sur un autre côté



Supposons M et N sur le côté $[BC]$ et, tout d'abord, P sur le côté $[CD]$. La hauteur du triangle est celle du parallélogramme. Donc l'aire est strictement inférieure à $\frac{1}{2} S$, sauf si M et N sont aux deux bouts de $[BC]$.

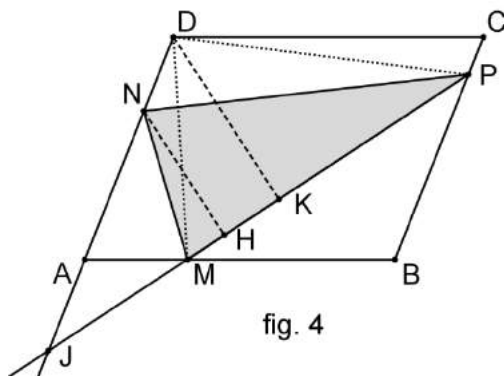
Si maintenant P est par exemple (point P' sur la figure 2) sur le côté $[AD]$, on voit aussitôt que

Aire $MNP \leq$ aire $MND \leq$ aire ABD ; comme cette dernière vaut $\frac{1}{2} S$, l'aire du triangle MNP est strictement inférieure à

$\frac{1}{2} S$, sauf si M et N sont aux deux bouts de $[BC]$ et P en D .

Troisième cas : (T) a ses sommets sont sur trois côtés différents de (Π)

Supposons donc M sur $]AB[$, N sur $]AD[$, P sur $]BC[$. Nous allons montrer que, sauf si on a en



même temps $N = D$ et $P = C$, l'aire du triangle MNP est strictement inférieure à $\frac{1}{2} S$.

Supposons par exemple $N \neq D$.

La droite (PM) coupe la droite (AD) en un point J qui est par rapport à la droite (AB) du côté opposé à celui de P , qui est aussi celui de D , donc A est entre D et J ; les points J, A, N, D se succèdent donc dans cet ordre.

Soient H et K les projections orthogonales de N et D sur la droite (PM) . De $\frac{JN}{JD} = \frac{NH}{DK}$ on déduit que $NH < DK$, donc que l'aire du triangle MNP est strictement inférieure à celle du triangle MDP .

Le même raisonnement appliqué au triangle MDP permet ensuite de prouver que, si $P \neq C$, l'aire de ce dernier est strictement inférieure à celle du triangle MDC , elle-même égale à $\frac{1}{2} S$.

On a donc établi le théorème 2, avec en prime le résultat que voici :

Théorème 3

Un triangle inclus dans un parallélogramme a une aire égale à la moitié de l'aire du parallélogramme si et seulement si un de ses côtés est un côté du parallélogramme, le sommet opposé du triangle étant sur le côté opposé du parallélogramme.

Commentaire

Nous avons par ce théorème résolu les problèmes suivants :

- Trouver tous les triangles d'aire maximale inclus dans un parallélogramme donné.
- Trouver tous les parallélogrammes d'aire minimale contenant un triangle donné.

Triangle inclus dans un rectangle

- Si on remplace partout dans la partie 1 le mot « parallélogramme » par le mot « rectangle », les résultats et les démonstrations sont inchangés, à ceci près qu'on ne peut inclure un triangle donné que dans trois rectangles d'aire double (si le triangle a ses angles aigus), dans deux (si le triangle a un angle droit) ou dans un seul (si le triangle a un angle obtus).

Il peut d'ailleurs être intéressant, dans une classe, de poser le problème directement avec un rectangle, d'aspect plus familier que le parallélogramme.

2. Parallélogramme inclus dans un triangle

Théorème 4

Tout parallélogramme est inclus dans un triangle d'aire double. Tout triangle contient un parallélogramme d'aire moitié.

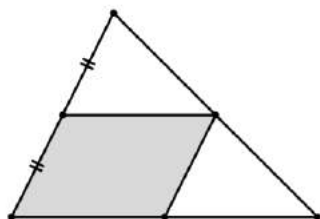


fig. 5a

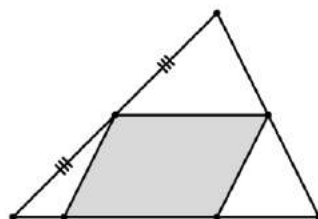


fig. 5b

Comme pour le théorème 1, une figure suffit à suggérer la démonstration (la figure 5a prouve l'existence d'une solution, la figure 5b sa non-unicité).

Nous allons là encore montrer que ce théorème n'est pas améliorable. Plus précisément :

Théorème 5

Tout triangle contenant un parallélogramme a une aire au moins double de celle de ce dernier. Tout parallélogramme inclus dans un triangle a une aire au plus égale à la moitié de celle de ce dernier.

Les deux énoncés ci-dessus sont manifestement équivalents.

Soit donc un triangle MNP d'aire S , que nous appellerons (T) , et un parallélogramme $ABCD$ d'aire σ , que nous appellerons (Π) , inclus dans (T) .

Premier cas : les sommets de (Π) sont sur le pourtour de (T)

Les quatre sommets M, N, P, Q sont à répartir sur les trois côtés de (T) . Deux d'entre eux sont donc sur le même côté ; puisque (Π) est inclus dans (T) , ce sont deux sommets consécutifs de (Π) . Quitte à changer les notations, on peut toujours supposer que M est sur $[AB]$, N sur $[AC]$, P et Q sur $[BC]$. On a alors $(MN) \parallel (BC)$. La hauteur issue de A coupe la droite (BC) en H et la droite (MN) en K .

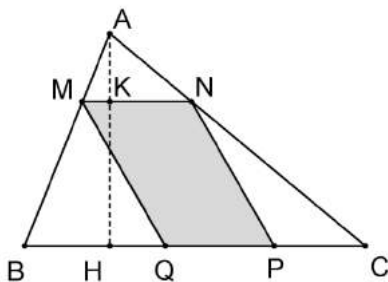


fig. 6

Posons $BC = a$, $AH = h$ et $x = \frac{AM}{AB}$. D'après le théorème de Thalès, on a :

$MN = ax$ et $HK = AH - AK = h(1 - x)$. Si on appelle $\sigma(x)$ l'aire de \mathcal{P} , on a :

$$\sigma(x) = MN \times HK = ahx(1 - x), \text{ donc } \sigma(x) = 2Sx(1 - x).$$

L'étude du maximum de σ lorsque x décrit $[0,1]$ peut être facilitée si on fait calculer d'abord $\sigma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}S$, puis $\sigma\left(\frac{1}{2}\right) - \sigma(x) = \frac{1}{2}S(1 - 2x)^2$.

L'aire du parallélogramme est donc toujours strictement inférieure à $\frac{1}{2}S$, sauf si M et N sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$, auquel cas elle vaut exactement $\frac{1}{2}S$.

Second cas : un côté de (Π) est porté par un côté de (T) et au moins un sommet de (Π) est intérieur à (T)

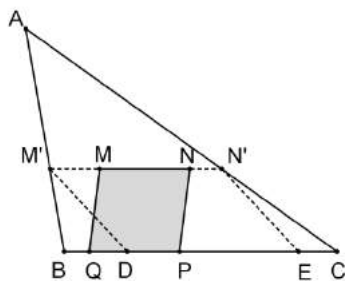


fig. 7

Prenons encore le parallélogramme $MNPQ$ tel que B, Q, P, C soient dans cet ordre sur la droite (BC) , mais supposons cette fois qu'au moins un des deux points M et N est intérieur au triangle.

La droite portant $[MN]$ coupe $[AB]$ en M' et $[AC]$ en N' et l'on a $MN < M'N'$. Prenons maintenant sur $[BC]$ deux points D et E tels que $DE = M'N'$. Le parallélogramme $M'N'ED$ ne contient pas forcément (Π) , mais il a même hauteur que lui et une base plus longue, puisque $M'N' > MN$. Or il satisfait aux hypothèses du premier cas. D'où : $\sigma < \text{aire}(M'N'ED) \leq \frac{1}{2}S$.

Troisième cas : aucun côté de (II) n'est porté par un côté du triangle (T)

Les droites Δ et Δ' portant les côtés $[QM]$ et $[PN]$ du parallélogramme $MNPQ$ coupent le bord du triangle en quatre points, donc deux d'entre eux sont sur le même côté du triangle, que l'on peut toujours supposer être $[BC]$. On aboutit donc à la figure 8.

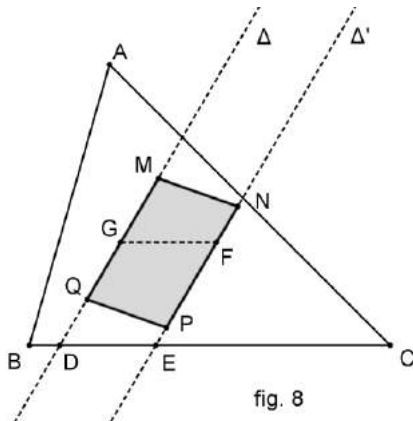


fig. 8

On définit un point G de Δ par $DG = QM$ et un point F de Δ' par $EF = PN$, ce qui revient à faire glisser les segments $[QM]$ et $[PN]$ le long de leurs supports respectifs pour les amener en butée sur $[BC]$.

Les deux parallélogrammes $MNPQ$ et $DEFG$ ont même hauteur, la distance des deux droites Δ et Δ' , et des bases de même longueur. Ils ont donc même aire. Or le parallélogramme $DEFG$ satisfait aux hypothèses du second cas : il a donc une aire inférieure strictement à $\frac{1}{2} S$, ce qui termine la démonstration.

N.B : Nous avons obtenu en outre un résultat intéressant :

Théorème 6

Un parallélogramme inclus dans un triangle a une aire égale à la moitié de l'aire du triangle si et seulement si deux de ses sommets sont les milieux de deux côtés du triangle, les deux autres étant situés sur le troisième côté.

Commentaire

Nous avons donc résolu les problèmes suivants :

- Trouver tous les parallélogrammes d'aire maximale inclus dans un triangle donné.
- Trouver tous les triangles d'aire minimale contenant un parallélogramme donné.

Rectangle inclus dans un triangle

Si on remplace le mot « parallélogramme » par le mot « rectangle », les théorèmes 4, 5 et 6 restent valables, mais on les obtient comme conséquences de l'étude faite pour le parallélogramme. On notera qu'on ne peut dans un triangle inclure que trois rectangles d'aire moitié (si le triangle a ses angles aigus), deux (si le triangle a un angle droit) ou un seul (si le triangle a un angle obtus).

3. Problèmes relatifs à un quadrilatère convexe

Étant donné un quadrilatère quelconque (Q) du plan, nous allons essayer de lui étendre certains des résultats précédents. Nous nous attaquerons entre autres aux deux problèmes suivants :

- trouver un parallélogramme contenant (Q) et d'aire au plus double de celle de (Q) ;
- trouver un triangle contenant (Q) et d'aire au plus double de celle de (Q) ;

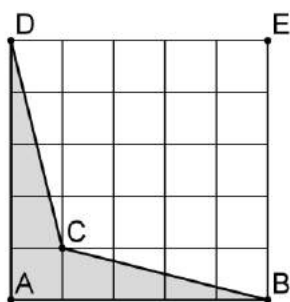


fig. 9

Le lecteur se convaincra aisément que, pour le quadrilatère non convexe $ABCD$ représenté sur la figure 9, la réponse aux deux questions est négative.

En effet, si on considère que chaque carré élémentaire de la figure a pour côté 1, tout triangle ou parallélogramme contenant le polygone contient aussi le triangle isocèle ABD , d'aire $\frac{25}{2}$, alors que l'aire du polygone donné est 5.

Nous nous limiterons désormais, dans tout ce qui suit, aux polygones convexes.

Parallélogrammes contenant un quadrilatère convexe

Remarque préliminaire

On n'a nul besoin ici d'une définition de la convexité : il suffit de dire qu'aucun des quatre sommets n'est dans le triangle défini par les trois autres.

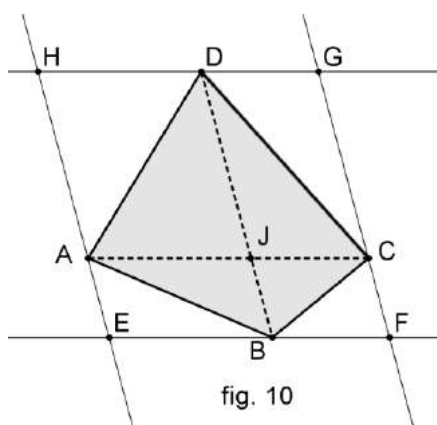


fig. 10

Théorème 7

Pour tout quadrilatère convexe, on peut trouver un parallélogramme d'aire double le contenant.

Soit un quadrilatère convexe (Q), de sommets A, B, C, D . Menons par les sommets les parallèles aux diagonales. Avec les notations de la figure 10, on voit aussitôt que chacun des quatre parallélogrammes en lesquels les diagonales (AC) et (BD) partagent $EFGH$ a une aire double de chacun des triangles en lesquels les diagonales partagent $ABCD$.

Parallélogramme d'aire minimale contenant un quadrilatère convexe

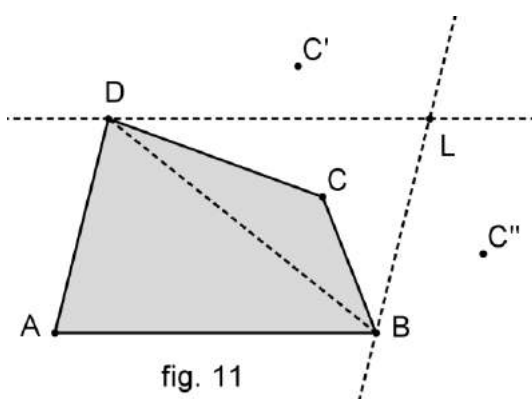


fig. 11

Essayons de trouver un parallélogramme encore « plus petit » contenant (Q). On va cette fois utiliser des parallèles à deux côtés, la difficulté étant de bien choisir ces derniers. Parmi les quatre triangles ABC, ABD, ACD, BCD prenons celui² (ou l'un de ceux) dont l'aire est la plus grande. Supposons que ABD soit dans ce cas ; menons par B la parallèle à (AD) et par D la parallèle à (AB) ; soit L le point d'intersection de ces deux droites.

Montrons que C est dans le triangle BLD . Le quadrilatère

² Signalons au passage un joli petit exercice. Étant donné quatre points distincts non alignés A, B, C, D , si trois au moins des triangles ABC, ABD, ACD, BCD ont même aire, les quatre points sont, dans un certain ordre, les sommets d'un parallélogramme.

(Q) étant convexe, A et C sont de part et d'autre de (BD). Supposons maintenant que C soit par rapport à (DL) du côté opposé à A (position C' sur la figure 11); sa distance à (AB) serait strictement supérieure à celle de D et l'aire du triangle ABC serait strictement supérieure à celle du triangle ABD , ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc C est par rapport à (DL) du même côté que A (étant entendu qu'il peut être sur (DL)). Le même raisonnement (fait à partir de la position C'' de la figure 11) prouve, par comparaison des aires de ACD et ABD , que C est par rapport à (BL) du même côté que A (étant entendu qu'il peut être sur (BL)).

Finalement, C est dans le triangle BLD , et (Q) est inclus dans le parallélogramme $ABLD$. On ne peut pas trouver de parallélogramme contenant (Q) dont l'aire soit plus petite que celle de $ABLD$, car tout parallélogramme contenant (Q) contient le triangle ABD , donc (théorème 2) son aire est au moins double de celle de ABD , c'est-à-dire au moins égale à celle de $ABLD$.

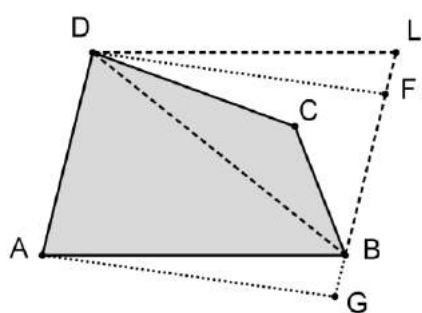


fig. 12

Commentaire

Reste une question : existe-t-il d'autres parallélogrammes que $ABLD$ ayant même aire que lui et contenant aussi (Q) ? La figure 12 montre que oui.

Il n'est pas très difficile, d'ailleurs, de trouver toutes les solutions. Nous laissons ce travail aux bons soins du lecteur.

Rectangles contenant un quadrilatère convexe

Théorème 7 bis

Étant donné un quadrilatère convexe, il existe un rectangle d'aire au plus double le contenant.

Nous allons adapter les deux raisonnements précédents correspondant aux figures 10 et 11. Le premier privilégiait une diagonale, le second privilégiait un côté.

On considère deux sommets A et B du quadrilatère tels que AB soit la plus grande (au sens large) des six distances mutuelles des quatre sommets. Soit Δ et Δ' les perpendiculaires menées de A et B à (AB). Les deux autres sommets, C et D , sont dans la bande comprise entre Δ et Δ' . En effet³, projetons par exemple C en H sur (AB). On a $AH \leq AC \leq AB$ et $BH \leq BC \leq AB$; les distances AH et BH étant au plus égales à AB , H appartient à $[AB]$.

³ On peut le justifier autrement : C est dans l'intersection du disque fermé de centre A passant par B et du disque fermé de centre B passant par A (faire la figure).

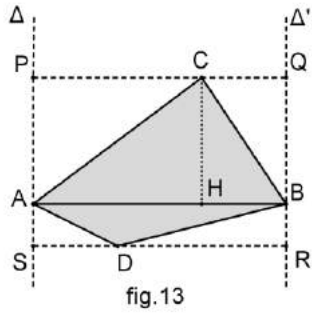


fig.13

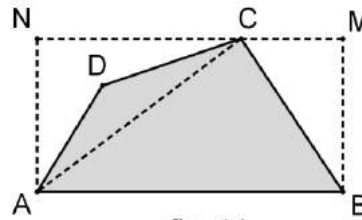


fig. 14

Premier cas : $[AB]$ est une diagonale (figure 13)

Les parallèles à (AB) menées de C et D déterminent avec Δ et Δ' un rectangle $PQRS$ d'aire double de celle du quadrilatère (pour le voir, le décomposer en les deux rectangles $ABQP$ et $ABRS$).

Second cas : $[AB]$ est un côté (figure 14)

Alors C et D sont du même côté de (AB) . Supposons, par exemple que C soit le plus éloigné de (AB) . Le rectangle $ABMN$ de la figure 14 contient le quadrilatère ; son aire est double de celle du triangle ABC , donc elle est moindre que le double de celle du quadrilatère.

Remarque

La recherche d'un rectangle d'aire minimale contenant un quadrilatère donné est un problème complexe, auquel nous ne toucherons pas.

Triangles contenant un quadrilatère convexe

Sans chercher les meilleures solutions possibles, nous démontrerons le théorème ci-dessous.

Théorème 8

Pour tout quadrilatère convexe qui n'est pas un parallélogramme, on peut trouver un triangle le contenant dont l'aire soit strictement moindre que le double de la sienne.

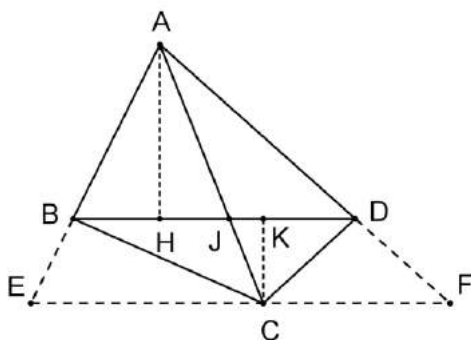


fig. 15

Soit $ABCD$ un tel quadrilatère et J le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$; pour l'une au moins d'entre elles, mettons $[AC]$, J n'est pas son milieu. On peut toujours supposer, quitte à changer les notations, que $AJ > JC$.

C'est en fait la même idée que précédemment, car supposer $AJ > JC$ revient à supposer que l'aire de ABD est strictement supérieure à celle de ACD .

Soit H la projection orthogonale de A sur (BD) et K celle de C . D'après le théorème de Thalès, on a

$$\frac{CK}{AH} = \frac{CJ}{AJ}, \text{ d'où } CK < AH. \text{ Posons } BD = a, AH = h, CK = k.$$

$$\text{L'aire du quadrilatère est } \sigma = \frac{1}{2} a(h + k).$$

Menons maintenant la parallèle à (BD) issue de C , qui coupe (AB) en E et (AD) en F . D'après le théorème de Thalès, $\frac{EF}{BD} = \frac{AE}{AB} = \frac{AC}{AJ} = \frac{h+k}{h}$, donc $EF = a \frac{h+k}{h}$.

La hauteur correspondante du triangle AEF est $h + k$, donc l'aire de ce triangle est

$$S = \frac{1}{2} a \frac{(h+k)^2}{h} = \sigma \frac{h+k}{h} = \sigma \left(1 + \frac{k}{h}\right).$$

De $k < h$, on tire $S < 2\sigma$, ce qui prouve que le triangle AEF répond à la question.

4. Extension aux polygones convexes

Rectangles contenant un polygone convexe

Théorème 9

Pour tout polygone convexe, on peut trouver un rectangle le contenant dont l'aire soit au plus le double de la sienne.

Il nous suffira d'adapter la démonstration faite dans le cas d'un quadrilatère convexe (théorème 7 bis).

Soit donc un polygone convexe (P) . On considère deux sommets A et B du polygone aussi éloignés l'un de l'autre que possible, c'est-à-dire tels que AB soit au moins égale à chacune des distances mutuelles des sommets de (P) .

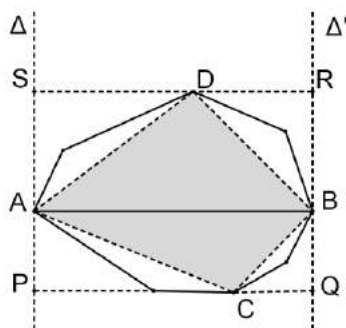


fig. 16

Soit Δ et Δ' respectivement les perpendiculaires menées de A et B à (AB) . Tous les autres sommets sont dans la bande comprise entre Δ et Δ' (il suffit de reprendre mot pour mot le raisonnement fait à ce propos dans la démonstration du théorème 7 bis).

De chaque côté de (AB) on prend le sommet le plus éloigné de la droite (AB) ; appelons-les C et D (si $[AB]$ est un côté de (P) , l'un des deux n'existe pas, mais cela ne change rien à la démonstration). Les parallèles à (AB) menées de C et D déterminent avec Δ et Δ' un rectangle $PQRS$ d'aire double de

celle du quadrilatère $ADBC$ (comparer les aires de ACB et $ABQP$, puis celles de ADB et $ABRS$).

Mais $ADBC$ est inclus dans (P) . Donc l'aire de $PQRS$ est au plus double de celle de (P) .

Triangles inclus dans un polygone convexe

Problème

On cherche à inclure dans un polygone convexe donné (P) d'aire S un triangle d'aire aussi grande que possible. Comment organiser cette recherche? Et que dire de l'aire maximum trouvée?

Lemme 1

Si un triangle inclus dans un polygone convexe a au moins un sommet intérieur au polygone, il existe un triangle d'aire strictement plus grande dont les trois sommets sont sur le pourtour du polygone.

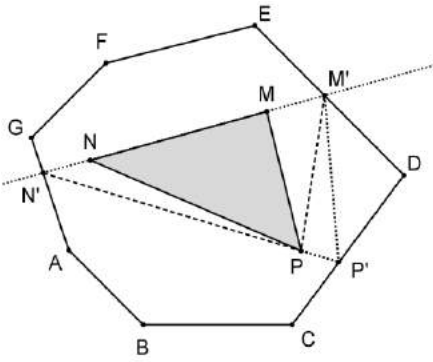


fig. 17

Soit donc un triangle MNP inclus dans le polygone convexe $ABCDEFG$; on suppose que le point M est intérieur au polygone. La droite (MN) coupe ce dernier selon un segment $[M'N']$ contenant strictement $[MN]$. On a donc :

$$\text{aire } MNP < \text{aire } M'N'P.$$

Il reste à recommencer une opération analogue pour remplacer le point P par un point P' convenable situé lui aussi sur le bord du polygone (voir figure 17) pour obtenir un triangle $M'N'P'$ d'aire encore plus grande.

Lemme 2

Étant donné un triangle dont les trois sommets sont sur le pourtour d'un polygone convexe, il existe un triangle d'aire au moins égale dont les trois sommets sont des sommets du polygone.

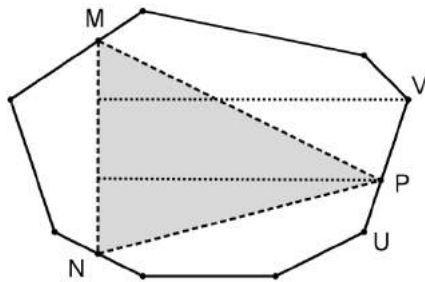


fig. 18

Soit donc M, N, P trois points du pourtour du polygone. Supposons que le point P ne soit pas un sommet du polygone ; il est sur un côté $]UV[$.

Si ce côté n'est pas parallèle à $[MN]$, l'un des deux points U et V , mettons V , est plus éloigné de la droite (MN) que P . Alors le triangle MNV a une aire supérieure à celle de MNP . Si le côté $]UV[$ est parallèle à $[MN]$, les deux points U et V sont à la même distance de la droite (MN) que P . Alors le triangle MNV a une aire égale à celle de MNP . En remplaçant P par V , on obtient dans tous les cas un triangle

d'aire au moins égale à celle de MNP . Il reste à pratiquer la même opération sur N et M pour établir le lemme.

Théorème 10

Parmi les triangles inclus dans un polygone convexe, il en existe un dont les trois sommets sont des sommets du polygone et dont l'aire est au moins égale à celle de tous les autres.

Il suffit pour le prouver de prendre parmi tous les triangles formés avec trois sommets du polygone (si ce dernier a n côtés, il y a donc $\binom{n}{3}$ triangles à examiner) et de prendre celui (ou l'un de ceux) dont l'aire est la plus grande. L'application des deux lemmes permet alors de conclure.

N.B. 1 : Nous avons donc trouvé un processus fini (pour ne pas dire un algorithme) permettant de déterminer l'aire maximale d'un triangle inclus dans un polygone convexe donné.

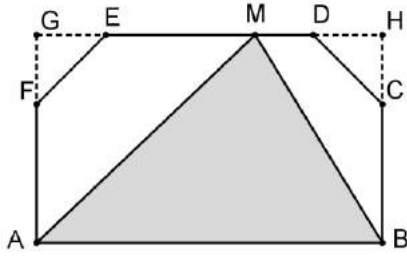


fig. 19

N.B. 2: Il peut exister des triangles inclus d'aire maximale dont les sommets ne soient pas tous des sommets du polygone.

En effet, sur la figure 19, le triangle AMB est d'aire maximale dans l'hexagone $ABCDEF$ quelle que soit la position de M sur $[DE]$, car il est déjà d'aire maximale dans le rectangle $ABHG$.

Théorème 11

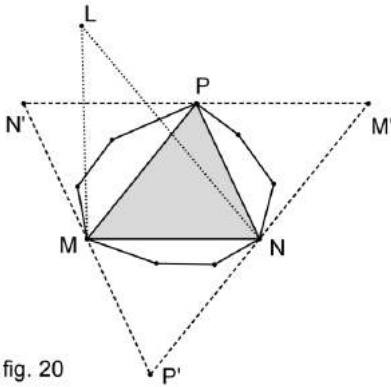


fig. 20

Soit (T) un triangle d'aire maximale inclus dans un polygone convexe donné (Π) ; le triangle (T') obtenu en menant par chaque sommet de (T) la parallèle au côté opposé contient (Π) .

Soient M, N, P les sommets de (T) , M', N', P' les sommets de (T') , les notations étant celles de la figure 20. Supposons qu'un point L de (Π) soit situé hors de (T') . Par rapport à l'un au moins des côtés de (T') , disons par exemple $(M'N')$, il est dans le demi-plan qui ne contient pas (Π) . Donc sa distance à (MN) est strictement supérieure à celle de P , ce qui prouve que l'aire du triangle MNL est strictement supérieure à celle de (T) , ce qui contredit la définition de (T) .

Théorème 12

L'aire maximum des triangles inclus dans un polygone convexe est au moins égale aux $3/8$ de l'aire de ce dernier.

Donnons-nous un polygone convexe (Π) d'aire S . Soit A le sommet le plus à gauche, B le sommet le plus à droite (l'un et l'autre pas forcément uniques).

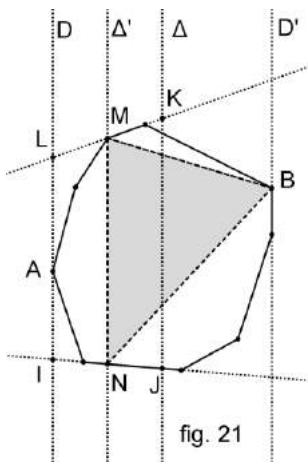


fig. 21

(Π) est inclus dans la bande définie par la verticale D de A et la verticale D' de B . La verticale Δ équidistante de D et D' partage (Π) en deux morceaux. Supposons que celui de gauche soit le plus gros, c'est-à-dire que son aire s soit au moins égale à $\frac{1}{2} S$. La verticale Δ' équidistante de D et Δ coupe (Π) selon un segment $[MN]$. Le côté (ou l'un des deux côtés si M est un sommet) de (Π) passant par M coupe D en L et Δ en K ; le côté (ou l'un des deux côtés si N est un sommet) de (Π) passant par N coupe D en I et Δ en J .

Appelons p la distance des deux droites D et Δ . La moitié gauche de (Π) est incluse dans le trapèze $IJKL$, d'aire $p MN$. On a donc $s \leq p MN$ et a fortiori $\frac{1}{2} S \leq p MN$.

Considérons maintenant le triangle MNB . Son aire est $\frac{3}{4} p MN$; elle est donc au moins égale à $\frac{3}{8} S$.

Commentaire

Il serait agréable d'améliorer ce résultat en montrant que l'on peut toujours inclure dans (Π) un triangle d'aire au moins égale à $\frac{1}{2} S$. Un contre-exemple va nous montrer qu'il faut renoncer à cet espoir.

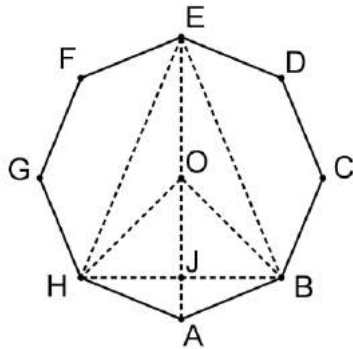


fig. 22

Soit un octogone régulier $ABCDEFGH$, d'aire S , inscrit dans un cercle de rayon R . En appliquant la formule d'Al Kashi au triangle OAB , on voit que $S = 8 \times \frac{1}{2} R^2 \sin 45^\circ$, donc $S = 2\sqrt{2} R^2$. Parmi les triangles d'aire maximum qu'il contient, il en est au moins un, (T) , dont les sommets sont pris parmi ceux de l'octogone. Compte tenu des symétries, on peut supposer que le plus petit côté de (T) est $[AB]$ ou $[HB]$. Si c'était $[AB]$, le troisième sommet serait E ou F ; or l'aire de ABE est double de celle du triangle OAB , donc vaut $\frac{1}{4} S$, manifestement insuffisant. Il nous faut donc prendre comme base de (T) la segment $[HB]$ et comme sommet opposé le point le plus éloigné, c'est-à-dire E .

L'aire de (T) est donc, avec les notations de la figure $\sigma = \frac{1}{2} HB \times EJ = \frac{1}{2} R\sqrt{2} \times R \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, soit $\sigma = \frac{1+\sqrt{2}}{2} R^2$ ou encore $\sigma = \frac{1+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} S$, c'est-à-dire environ $0,427 S$.

N.B. : Ce qui précède ne prouve pas pour autant que dans le théorème 12 on ne puisse pas remplacer $3/8$, c'est-à-dire $0,375$, par un nombre un peu plus élevé. J'ignore quelle peut être la réponse à cette question.

Le lecteur pourra démontrer⁴, en utilisant un $3n$ -gone régulier et des valeurs de n arbitrairement grandes, que dans le théorème 12, le nombre $\frac{3}{8}$ ($0,375$) ne peut pas être remplacé par un nombre plus grand que $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$, soit environ $0,4135$. Mais cela laisse encore de la marge...

Triangles contenant un polygone convexe

Nous avons réservé pour la fin le théorème qui suit. C'est le plus coriace, mais sa démonstration n'exige que les connaissances du lycée.

Théorème 13

Pour tout polygone convexe, on peut trouver un triangle le contenant dont l'aire soit au plus égale au double de la sienne.

Soit un polygone convexe (Π) d'aire S et soit m le maximum de l'aire des triangles inclus dans (Π) . Nous allons nous servir d'un triangle (T) d'aire m inclus dans (Π) et distinguer deux cas.

⁴ Il suffit d'utiliser la propriété suivante : parmi tous les triangles inclus dans un cercle, les triangles équilatéraux sont ceux qui ont la plus grande aire.

Premier cas : $m \leq \frac{1}{2} S$

Considérons encore le triangle (T') obtenu en menant par chaque sommet de (T) la parallèle au côté opposé (Cf. figure 20). Il contient (Π) et son aire est $4m$, donc est au plus égale à $2S$.

Second cas : $m > \frac{1}{2} S$

Il est intuitif que, cette fois, les morceaux de (Π) débordant de (T) sont relativement « collés » contre (T). Plutôt que de se servir du triangle (T') précédent, il est plus intéressant d'utiliser un triangle (T'') dont les côtés soient parallèles à ceux de (T). Pour comparer les aires de ces deux triangles, nous utiliserons un lemme, dont la démonstration constitue en elle-même un bel exercice sur l'homothétie.

Lemme 3

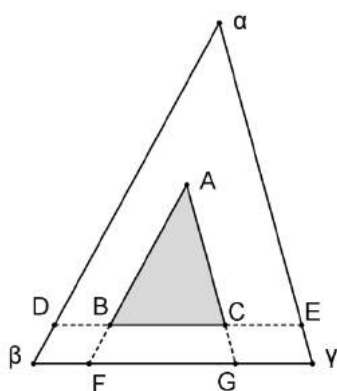
Étant donné un triangle ABC et trois nombres positifs λ, μ, ν , on construit un triangle $\alpha\beta\gamma$ comme suit :

- la droite ($\beta\gamma$) est l'image de la droite (BC) dans l'homothétie de centre A et de rapport $1 + \lambda$,
- la droite ($\gamma\alpha$) est l'image de la droite (CA) dans l'homothétie de centre B et de rapport $1 + \mu$,
- la droite ($\alpha\beta$) est l'image de la droite (AB) dans l'homothétie de centre C et de rapport $1 + \nu$.

Alors l'aire du triangle $\alpha\beta\gamma$ est le produit de celle du triangle ABC par $(1 + \lambda + \mu + \nu)^2$.

Avec les notations de la figure 23 ci-dessous, nous avons les égalités

$$FG = (1 + \lambda) BC ; DC = (1 + \nu) BC ; BE = (1 + \mu) BC.$$



$DBF\beta$ et $ECG\gamma$ étant des parallélogrammes, on a $\beta F = DB = \nu BC$ et $G\gamma = CE = \mu BC$.

Il en résulte

$$\beta\gamma = \beta F + FG + G\gamma = (1 + \lambda + \mu + \nu) BC.$$

Compte tenu de la symétrie des données, il vient

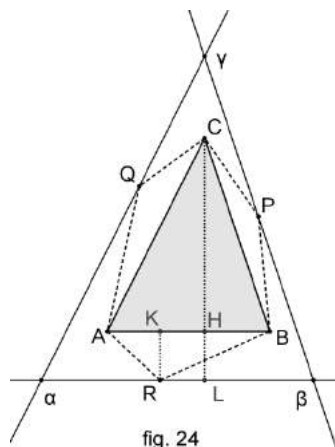
$$\frac{\beta\gamma}{BC} = \frac{\gamma\alpha}{CA} = \frac{\alpha\beta}{AB} = 1 + \lambda + \mu + \nu = k.$$

Le second triangle constitue donc un « agrandissement » du premier dans le rapport k , ce qui fait que son aire est le produit de l'aire de ABC par k^2 .

Fin de la démonstration du second cas

Reprenons notre polygone convexe (Π), d'aire S , et soit (T) encore d'un triangle inclus dans (Π) d'aire maximale m , avec cette fois $m > \frac{1}{2} S$. Désignons par A, B, C les sommets de (T) et par σ son aire.

On mène la parallèle à (AB) située du côté opposé à C et passant par le sommet de (Π) le plus éloigné de (AB) . Par rapport à cette droite, le polygone est tout entier d'un même côté. En opérant ainsi à partir de chacun des côtés, on obtient un triangle (T''') contenant (Π) , dont nous désignerons les sommets par α, β, γ conformément à la figure 24 et l'aire par Σ . Chaque côté de (T''') contient (au moins) un sommet de (Π) , disons P, Q, R respectivement sur $[\beta\gamma], [\gamma\alpha], [\alpha\beta]$. Il nous faut prouver que $\Sigma \leq 2S$.



Désignons par u, v, w les aires respectives des triangles BCP, CAQ, ABR . Le polygone $ARBPCG$ étant inclus dans (Π) , nous avons $m + u + v + w \leq S$

Posons $\lambda = \frac{u}{m}, \mu = \frac{v}{m}, \nu = \frac{w}{m}$. Avec les notations de la figure 24, nous avons : $\nu = \frac{\text{aire } ABR}{\text{aire } ABC} = \frac{RK}{CH} = \frac{HL}{CH}$.

La droite $(\alpha\beta)$ est l'image de la droite (AB) par l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{CL}{CH}$, soit $1 + \frac{HL}{CH}$, autrement dit $1 + \nu$. En procédant de même pour les droites $(\beta\gamma)$ et $(\gamma\alpha)$, on voit que les hypothèses du lemme 3 ci-dessus sont vérifiées.

Il en résulte que l'aire de (T''') est le produit de celle de (T) par $(1 + \lambda + \mu + \nu)^2$. Elle vaut donc :

$$\Sigma = m(1 + \lambda + \mu + \nu)^2 = \frac{1}{m}(m + u + v + w)^2,$$

d'où $\Sigma \leq \frac{1}{m}S^2$ et, comme $m > \frac{1}{2}S$, il vient $\Sigma \leq 2S$, ce qui est la réponse espérée.

Remarque

On peut aisément vérifier que les théorèmes 9, 11, 12 et 13 s'étendent à un compact convexe quelconque.