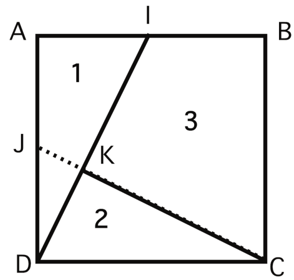
# Le puzzle à trois pièces

## François Drouin(*)

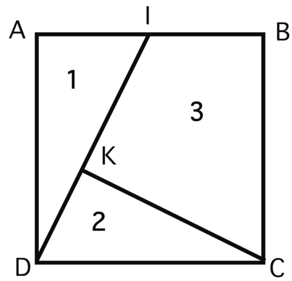
Gilbert Gribonval l'a confié au début des années 80 au groupe Jeux de l'A.P.M.E.P. pendant la préparation de la brochure Jeux 1. Je l'ai régulièrement utilisé lorsque j'enseignais au collège de Saint-Mihiel, j'en ai fait profiter mes étudiants P.E.1. et mes jeunes collègues P.E.2. et P.L.C.2. à l'I.U.F.M. Il faisait partie d'un des stands de l'exposition « Objets Mathématiques » de l'A.P.M.E.P. Lorraine, il était mis en vente lors des récentes journées nationales A.P.M.E.P. à Paris. Ces quelques pages rendent compte de l'atelier que j'y ai animé à son sujet. Un important chapitre lui est consacré dans la brochure « Jeux 9 » sortie en 2011 pendant les journées nationales de Grenoble.

### Deux constructions possibles de ce puzzle :

ABCD est un carré. I est le milieu du côté [AB]. J est le milieu du côté [AD].
Les droites (DI) et (JC) se coupent en K. Le puzzle est formé des triangles AID et DKC ainsi que du quadrilatère IBCK.




ABCD est un carré. I est le milieu du côté [AB]. La droite perpendiculaire à la droite (ID) passant par le point C coupe la droite (DI) en K.




En classe, j'utilisais plutôt la seconde : lors de l'utilisation de la première, il y avait toujours quelques élèves maladroits découpant également le long du pointillé et devant recommencer leurs tracés. De plus, privilégier la manipulation de l'équerre me semblait intéressant.

Ces deux constructions sont-elles équivalentes ? Les outils mis à dispositions des élèves se sont raréfiés : plus de rotations et de translations au collège, plus de triangles isométriques en seconde. Cependant, il reste possible de faire montrer cette équivalence à des élèves de collège :

(*) I.U.F.M. de Lorraine « francois.drouin2@wanadoo.fr »

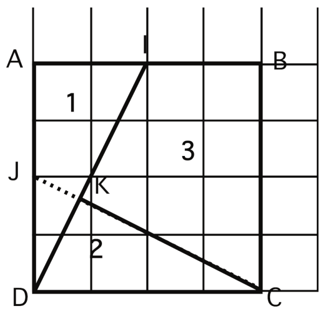
J'utilise la première construction. Il me faut donc démontrer que les droites (DI) et (JC) sont perpendiculaires. Les angles JCD et ADI sont égaux car leurs tangentes sont égales. Les angles AID et IDC (alternes-internes) sont égaux. La somme des angles du triangle AID est égale à 180°, il en est de même pour la somme des angles du triangle DKC. Je peux en déduire que les angles IAD et DKC sont égaux (à un angle droit). Les droites (DI) et (JC) sont donc perpendiculaires.

J'utilise la seconde construction. Il me faut démontrer que J est le milieu du segment [AD]. Je voudrais démontrer que les angles ADI et DCJ sont égaux, cela me servira par la suite à prouver que les longueurs DJ et AI sont égales. Les droites (AB) et (DC) sont parallèles, les angles AID et IDC sont alternes-internes et donc égaux. Dans les triangles rectangles DAI et DKC, les angles ADI et DCK ont respectivement pour complément les angles AID et IDC qui sont égaux. Les angles ADI et DCK sont donc égaux, tout comme les angles ADI et DCJ.

Les angles ADI et DCJ sont égaux et ont donc des tangentes égales : $\frac{\text{JD}}{\text{DC}} = \frac{\text{AI}}{\text{AD}}$ ; or DC = AD (côtés du carré ABCD), donc DJ = AI (égaux à la moitié du côté du carré). J'en déduis que J est le milieu du segment [AD].

La géométrie analytique fait son retour dans les programmes du lycée.

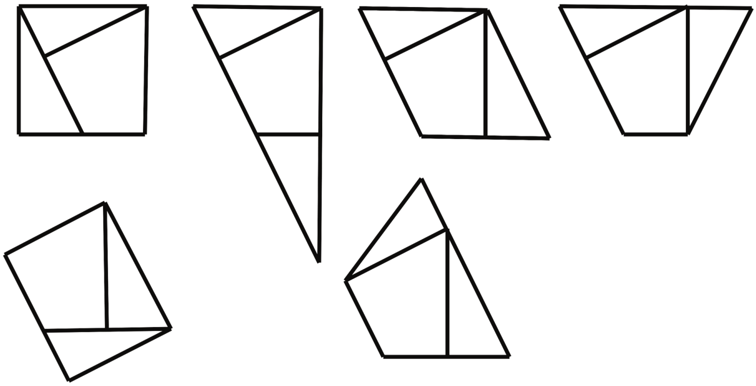
Dans le repère $(\text{D},\text{C},\text{A})$, on a $\text{D}(0{,}0)$, $\text{C}(1{,}0)$, $\text{A}(0{,}1)$. Il sera possible en classe de Première de démontrer que les droites (JC) et DI) sont perpendiculaires (ou que les vecteurs JC et DI sont orthogonaux). En classe de Seconde, il est possible de calculer les coordonnées du point K, puis les longueurs KC et KD, puis d'utiliser la réciproque du théorème de Pythagore dans le triangle DKC.




Dans le repère $(\text{D},\text{C},\text{A})$, on a $\text{D}(0{,}0)$, $\text{C}(1{,}0)$, $\text{A}(0{,}1)$. L'élève de Seconde pourra trouver l'équation de la droite (DI), mais n'a pas les outils pour trouver l'équation de la droite perpendiculaire à la droite (DI) passant par le point C. Il les aura en classe de Première.

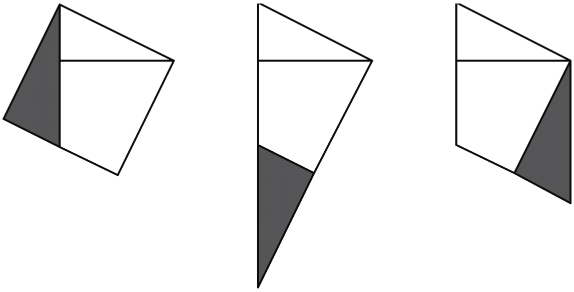
## Triangles et quadrilatères formés avec les trois pièces :

Avec les trois pièces, il est possible de réaliser un triangle rectangle, un parallélogramme, deux modèles différents de trapèze isocèle, un quadrilatère qui ressemble à la pièce « 3 » et un rectangle. Le parallélogramme demandé n'est ni un carré, ni un rectangle, les trapèzes ont disparu depuis pas mal de temps des programmes de l'école élémentaire et de l'enseignement secondaire, mais il n'est pas interdit d'en faire rencontrer aux élèves.

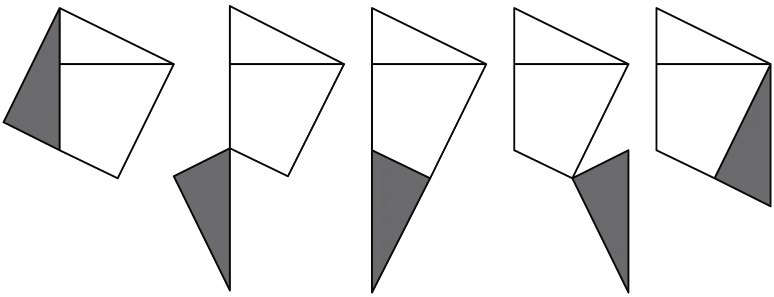


Les solutions ainsi disposées montrent les déplacements des deux triangles. Des rotations et des translations interviennent, ce qui pourra perturber des élèves de collège. Cependant, des symétries pourront être mises en évidence,

Du carré au parallélogramme, il est possible de faire intervenir deux symétries centrales agissant l'une après l'autre :



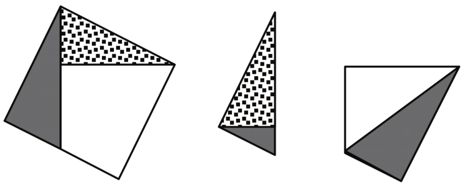
Il est également possible de faire intervenir deux fois deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires.



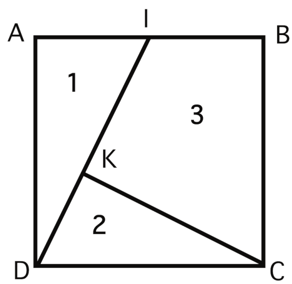
Il reste à justifier que la figure obtenue est un parallélogramme. Deux côtés opposés de même longueur pour un quadrilatère non croisé peuvent être mis à contribution et il ne faudra pas oublier de justifier certains alignements.

## Aires et périmètres :

Avec de jeunes élèves, en utilisant des superpositions des pièces, il est possible de faire ordonner les trois pièces de la plus petite aire à la plus grande aire, mais aussi du plus petit périmètre au plus grand périmètre,



Avec des élèves plus âgés, il sera possible de répondre en faisant calculer les dimensions de chacune des pièces.




Soit $a$ le côté du carré ABCD. En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AID, je trouve $\mathrm{DI} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. Le périmètre de la pièce 1 est donc $a + \dfrac{a}{2} + \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, c'est-à-dire $\dfrac{3a}{2} + \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$,

Je voudrais maintenant calculer KC. J'ai démontré plus haut que les angles DKC et ADI sont égaux. Je ne peux plus évoquer le fait que les triangles AID et KDC sont deux triangles de même forme et qu'ils ont des mesures de côtés proportionnels. Il m'est malgré tout possible de dire que les angles égaux DKC et ADI ont des sinus égaux et des cosinus égaux (je retrouve les rapports que m'auraient fournis les triangles de même forme).

$$\frac{\mathrm{KC}}{\mathrm{DC}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{ID}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{DK}}{\mathrm{DC}} = \frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{ID}}$$

$\mathrm{ID} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $\mathrm{AD} = \mathrm{DC} = a$, $\mathrm{AI} = \dfrac{a}{2}$. Je peux calculer KC puis DK et enfin KI.

Je trouve $\mathrm{KC} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$ et $\mathrm{DK} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Finalement $\mathrm{IK} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} - \dfrac{a\sqrt{5}}{5} = \dfrac{3a\sqrt{5}}{10}$.

Le périmètre du triangle AID est égal à $\dfrac{3a}{2} + \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Le périmètre du triangle DKC est égal à $a + \dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$.

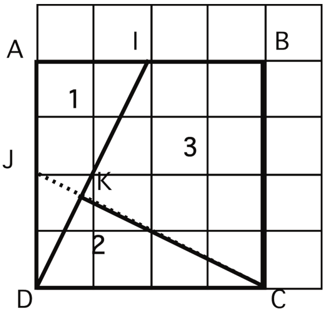
Il reste à prouver $\frac{3a}{2}+\frac{a\sqrt{5}}{2}>a+\frac{3a\sqrt{5}}{5}$, c'est-à-dire $\frac{a}{2}>\frac{a\sqrt{5}}{10}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}>\frac{\sqrt{5}}{10}$.

Le périmètre du quadrilatère IBCK est égal à $\frac{3a}{2}+\frac{7a\sqrt{5}}{10}$.

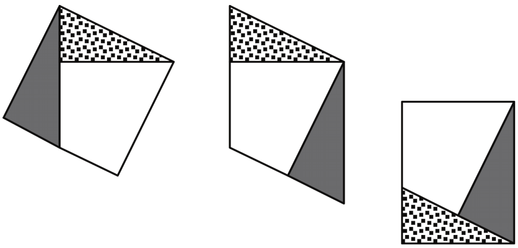
Il restera à prouver $\frac{3a}{2}+\frac{a\sqrt{5}}{2}<\frac{3a}{2}+\frac{7a\sqrt{5}}{10}$.

La géométrie analytique fait son retour dans les programmes du lycée.

Dans le repère $(\mathrm{D},\mathrm{C},\mathrm{A})$, j'ai $\mathrm{D}(0,0)$), $\mathrm{C}(1,0)$, $\mathrm{A}(0,1)$, $\mathrm{I}\left(\frac{1}{2},0\right)$ et $\mathrm{J}\left(0,\frac{1}{2}\right)$. J'ai calculé les coordonnées du point K (point d'intersection des droites (JC) et (ID)), j'ai démontré que le triangle DKC était rectangle (c'est bien la pièce 2), je peux calculer les longueurs des côtés des trois pièces du puzzle.




Vous aurez sans doute remarqué que KC est la largeur du rectangle obtenu avec les trois pièces formant le carré initial…

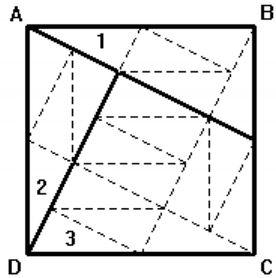


Le carré et le rectangle ont même aire : $a^2$. La longueur du rectangle est la longueur de l'hypoténuse de la pièce 1, c'est-à-dire $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Je peux donc trouver la largeur du rectangle…

Les différentes longueurs des côtés des pièces permettent le calcul des aires des trois pièces.

Ce découpage des trois pièces utilise des triangles isométriques et permet de trouver les mesures des aires des trois pièces en variant l'unité d'aire choisie (l'aire de la pièce 3 par exemple…).

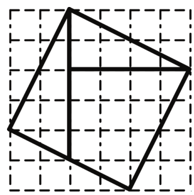
Par ailleurs, n'oublions pas que la manipulation des trois pièces du puzzle permet la réalisation de polygones ayant même aire et de périmètres différents.



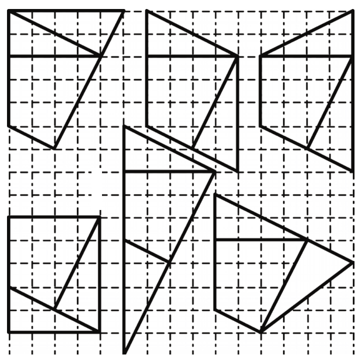

## Un puzzle construit sur les nœuds d'un quadrillage :

Les calculs des longueurs des côtés des pièces ne sont accessibles qu'aux élèves en fin de collège. Les enseignants de l'école élémentaire utilisent avec profit le Tangram, qui peut être aisément tracé par les élèves en utilisant les nœuds d'un quadrillage. Le travail à propos de l'aire des pièces et de la mesure de l'aire des pièces en est facilité.

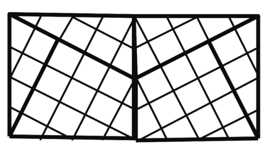
Le puzzle à trois pièces peut lui aussi être construit en utilisant les nœuds d'un quadrillage. Le découpage en triangles isométriques présenté précédemment se trace facilement, cette figure peut être reproduite par des élèves en fin de cycle 1, la géométrie analytique rencontrée actuellement au lycée peut être mise en œuvre.



En utilisant un puzzle pour lequel le quadrillage reste visible recto verso sur les pièces, une seule des configurations imaginées dans cet article reste non accessible : pour l'un des trapèzes demandés, le quadrillage d'un des triangles ne respecte pas le quadrillage dans lequel les figures peuvent être tracées.



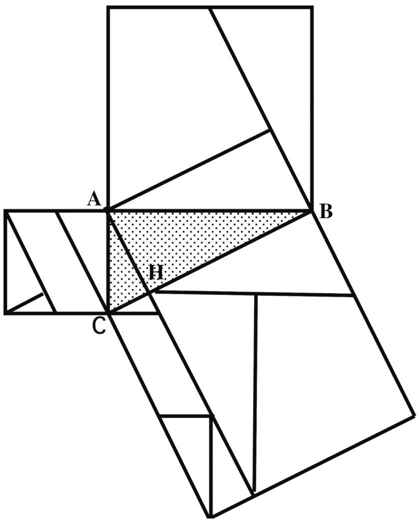
Ci-contre, voici un puzzle à agrandir, coller recto verso puis découper pour que le quadrillage reste visible sur les deux faces des pièces du puzzle



## Quelques compléments :

Le puzzle à trois pièces se retrouve dans un « puzzle de Pythagore ». Il a la particularité d'être construit à partir d'un triangle rectangle dont un côté de l'angle droit a pour longueur la moitié de la longueur de l'autre côté de l'angle droit. Il permet de plus la visualisation de propriétés « métriques » du triangle rectangle qu'il m'était demandé de connaître dans les années 60.

$CA^2 = CH \times CB.$
$BA^2 = BH \times CB.$




Ces deux formules sont visualisées dans la solution dessinée précédemment. Plus tard, on nous demanda des écritures avec des mesures algébriques. D'aucuns y trouveront des écritures pouvant faire intervenir des produits scalaires.
Une troisième relation nous était familière : $CH \times HB = AC \times AB$. Cette troisième égalité est actuellement accessible aux élèves de cycle 3 à qui les programmes 2008 demandent de connaître la formule de l'aire d'un triangle…

## Un peu de lecture supplémentaire :

Le puzzle à trois pièces s'est retrouvé quelque peu caché dans le problème 9 du Rallye 2008 de l'A.P.M.E.P. Lorraine. On y retrouve la recherche de ce qui pourra devenir la largeur du rectangle réalisable avec les trois pièces. L'énoncé est téléchargeable à partir de l'adresse
http://apmeplorraine.free.fr/index.php?module=rallye.

Le puzzle à trois pièces fait l'objet d'un dossier présent dans le coin jeux du site de l'A.P.M.E.P. Lorraine, téléchargeable à l'adresse
http://apmeplorraine.free.fr/index.php?module=coinjeux .

Le puzzle à trois pièces fait partie du dossier 9 de l'exposition itinérante de l'A.P.M.E.P. Lorraine, téléchargeable à l'adresse
http://apmeplorraine.free.fr/index.php?module=coinjeux&choix=5 .

À la suite de Jeux 1 de l'A.P.M.E.P., le puzzle de trois pièces est présent dans la brochure nº 188 de l'A.P.M.E.P. coéditée en 2009 avec VUIBERT : « Comment se jouer de la géométrie ». Il est également présent dans la brochure « Avec notre exposition Objets Mathématiques » éditée en 2010 par l'APMEP Lorraine.