

Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART
13, rue des Garennes
63 800 Cournon d'Auvergne

ou

hochartmax@yahoo.fr

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 495-1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note classiquement \mathcal{U}_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité, à savoir l'ensemble des complexes z tels que $z^n = 1$. Étudier, selon les valeurs de n , l'existence d'une application $f: \mathcal{U}_n \rightarrow \mathcal{U}_n$ telle que, pour tout $z \in \mathcal{U}_n$,

$$f \circ f(z) = z^2.$$

Je remercie **Philippe Patte** d'avoir attiré mon attention sur le problème suivant, inspiré d'un oral de Centrale 2010.

Problème 495-2

Calculer le déterminant de la matrice $A = (i \vee j)_{1 \leq i, j \leq n}$ où, pour deux entiers naturels i, j , le symbole $i \vee j$ désigne le ppcm de i et j .

Problème 495-3 (Michel Lafond)

Un entier strictement positif n est pythagoricien si dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ des entiers modulo n , tout élément est somme de deux carrés. Quels sont les entiers pythagoriciens ?

Problème 495-4 (Jean-Louis Trinquand)

Soit $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une application continue. On considère la suite x définie par $x_1 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x_n + \frac{1}{n}f(x_n).$$

Étudier la convergence de cette suite. Que dire de l'éventuelle limite ?

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 487-3 (Question de Michel Lafond)

On joue au jeu suivant. Il s'agit de trouver un nombre $N \in [[1, 299]]$. On ne peut poser que des questions du type « N est-il plus grand que x ? ». La réponse ne peut être que « oui » ou « non ». On peut poser au plus 12 questions avant de proposer une réponse. Mais on n'a droit qu'à un maximum de 3 réponses « non ». C'est-à-dire que si l'on a pour la troisième fois une réponse « non », on est obligé de proposer une réponse au coup suivant, puis le jeu est terminé. Il est possible de gagner à coup sûr, mais la stratégie est unique ! En particulier quelle doit être la première question ?

Solutions de Laurent Chéno (Lycée Dorian, Paris 11^e), Michel Lafond (Dijon), Jean Lefort (Wintzenheim), Joël Payen (Gagny), Sophie Toursel (Lycée Fourcade, Gardanne)

Plusieurs lecteurs notent l'ambiguïté de la question « N est-il plus grand que x ? ». S'agissait-il d'une inégalité stricte ou large ? Les deux lectures sont possibles et j'ai respecté chaque choix dans les réponses exposées ci-dessous. Cela ne modifie en rien la stratégie.

Dans une première solution, **Joël Payen** généralise la question ainsi : on se donne un intervalle d'entiers $[[A + 1, A + M]]$, et deux entiers $q, n \in \mathbb{N}$. On cherche un nombre N appartenant à $[[A + 1, A + M]]$, en posant uniquement des questions du type « N est-il strictement supérieur à $A + x$? ». Le nombre de questions posées ne peut dépasser q et le nombre de réponses « non » ne peut dépasser n . On dira que le triplet (M, q, n) est réalisable si, pour tout nombre N appartenant à $[[A + 1, A + M]]$, on est sûr de trouver N en au plus q questions dont au plus n réponses « non ». Il est clair que l'entier A ne joue aucun rôle dans cette définition. Pour deux entiers q, n donnés, **Joël Payen** s'intéresse au plus grand entier M tel que (M, q, n) soit réalisable. On va au préalable montrer l'existence de ce maximum.

Tout d'abord, les triplets $(M, 0, n)$ et $(M, q, 0)$ sont réalisables si et seulement si $M = 1$. On suppose désormais $M \geq 2$, donc $q, n \geq 1$.

Lemme 1. *Le triplet (M, q, n) est réalisable si et seulement s'il existe un entier $x \in [[1, M - 1]]$ tel que $(x, q - 1, n - 1)$ et $(M - x, q - 1, n)$ soient réalisables.*

Preuve. On suppose (M, q, n) réalisable. Il existe alors une stratégie gagnante dont la première question est « N est-il strictement supérieur à $A + x$? » pour un certain $x \in [[1, M - 1]]$. Les réponses « oui » et « non » sont toutes deux envisageables, car $M \geq 2$. Si la réponse est « non », alors l'entier N appartient à $[[A + 1, A + x]]$ et il reste $q - 1$ questions dont au plus $n - 1$ « non ». Si la réponse est « oui », alors N appartient à $[[A + x + 1, M]]$ et il reste $q - 1$ questions dont au plus n « non ». La stratégie étant gagnante, les triplets $(x, q - 1, n - 1)$ dans le premier cas et $(M - x, q - 1, n)$ dans le second cas, sont réalisables.

Réciproquement, s'il existe $x \in [[1, M - 1]]$ tel que les triplets $(x, q - 1, n - 1)$ et $(M - x, q - 1, n)$ soient réalisables, alors (M, q, n) est réalisable et la première question d'une stratégie gagnante est « N est-il strictement supérieur à $A + x$? » pour cet entier x donné par l'hypothèse.

Lemme 2. Soit $M, q, n \in \mathbb{N}$. Si le triplet (M, q, n) est réalisable, alors $M \leq 2^q$.

Preuve. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et l'on procède par récurrence sur q . Pour $q = 0$, on a vu en introduction que nécessairement $M = 1$, ce qui initialise la récurrence. On suppose l'assertion établie jusqu'à un certain rang $q - 1 > 0$. Alors, si le triplet (M, q, n) est réalisable, d'après le lemme précédent, il existe $x \in [[1, M - 1]]$ tel que les triplets $(x, q - 1, n - 1)$ et $(M - x, q - 1, n)$ soient réalisables. Par hypothèse de récurrence,

$$x \leq 2^{q-1} \text{ et } M - x \leq 2^{q-1},$$

donc

$$M = x + (M - x) \leq 2^{q-1} + 2^{q-1} = 2^q,$$

ce qui termine la récurrence.

Pour tous les entiers $q, n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des entiers M tels que le triplet (M, q, n) soit réalisable est non vide puisqu'il contient 1. Le lemme précédent montre que cet ensemble est fini. On peut donc considérer le maximum de cet ensemble, que l'on notera $\mathcal{M}(q, n)$.

Lemme 3. Pour $q, n \in \mathbb{N}^*$, on a la relation de récurrence

$$\mathcal{M}(q, n) = \mathcal{M}(q - 1, n - 1) + \mathcal{M}(q - 1, n).$$

Preuve. Soit $q, n \in \mathbb{N}^*$. Par définition, en posant $\mathcal{M} = \mathcal{M}(q, n)$ pour abrégier, le triplet (\mathcal{M}, q, n) est réalisable. D'après le lemme 1, il existe $x \in [[1, M - 1]]$ tel que $(x, q - 1, n - 1)$ et $(\mathcal{M} - x, q - 1, n)$ soient réalisables. Par définition toujours,

$$x \leq \mathcal{M}(q - 1, n - 1) \text{ et } \mathcal{M} - x \leq \mathcal{M}(q - 1, n),$$

donc

$$\mathcal{M}(q, n) = \mathcal{M} = x + (\mathcal{M} - x) \leq \mathcal{M}(q - 1, n - 1) + \mathcal{M}(q - 1, n).$$

Pour l'inégalité inverse, on pose

$$x = \mathcal{M}(q - 1, n - 1) \text{ et } M = \mathcal{M}(q - 1, n - 1) + \mathcal{M}(q - 1, n).$$

Les triplets $(x, q - 1, n - 1)$ et $(M - x, q - 1, n)$ sont réalisables, donc le triplet (M, q, n) également, ce qui impose

$$M \leq \mathcal{M}(q, n),$$

qui est l'inégalité souhaitée.

Lemme 4. Pour tous $q, n \in \mathbb{N}$, l'entier $\mathcal{M}(q, n)$ est donné par

$$\mathcal{M}(q, n) = \sum_{k=0}^n \binom{q}{k}.$$

Preuve. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et l'on fait une récurrence sur q . Si $q = 0$, on a vu que

$\mathcal{M}(0, n) = 1$, ce qui est cohérent avec la formule annoncée. Si l'assertion est établie jusqu'à un rang $q - 1 > 0$, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(q, n) &= \mathcal{M}(q-1, n-1) + \mathcal{M}(q-1, n) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{q-1}{k} + \sum_{k=0}^n \binom{q-1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{q-1}{k-1} + \sum_{k=0}^n \binom{q-1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\binom{q-1}{k-1} + \binom{q-1}{k} \right) + 1 \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{q}{k} + 1 \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{q}{k}, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.

Pour conclure, soit N un entier à chercher dans l'intervalle $[[1, M]]$ en au plus q questions et au plus n réponses « non ». On suppose qu'il existe une stratégie gagnante. La première question est alors « N est-il strictement supérieur à x ? » avec la condition

$$x \leq \mathcal{M}(q-1, n-1), \tag{1}$$

pour garantir la réussite si la réponse est « non », mais également la condition

$$M - x \leq \mathcal{M}(q-1, n) \tag{2}$$

pour garantir la réussite si la réponse est « oui ».

Dans le cas où M est le nombre $\mathcal{M}(q, n)$, la condition (2) et le lemme 3 imposent

$$x \geq M - \mathcal{M}(q-1, n) = \mathcal{M}(q-1, n-1),$$

donc il n'y a pas le choix pour $x = \mathcal{M}(q-1, n-1)$. On cherche ensuite N dans l'intervalle $[[1, \mathcal{M}(q-1, n-1)]]$ si la réponse est « non », ou dans l'intervalle $[[\mathcal{M}(q-1, n-1) + 1, \mathcal{M}(q, n)]]$ si la réponse est « oui ». Le premier intervalle est de longueur $\mathcal{M}(q-1, n-1)$ tandis que le second est de longueur $\mathcal{M}(q, n-1)$. Il n'y a donc pas le choix pour la seconde question, ni pour les suivantes.

Pour terminer l'étude générale, si l'on cherche N dans un intervalle $[[1, \mathcal{M}(q, n)]]$, alors la stratégie gagnante est unique et la première question est

$$\ll x \text{ est-il strictement supérieur à } \mathcal{M}(q-1, n-1) ? \gg.$$

Voici les premières valeurs des nombres $\mathcal{M}(q, n)$:

$n \setminus q$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	1	2	4	7	11	16	22	29	37	46	56	67	79
3	1	2	4	8	15	26	42	64	93	130	176	232	299

Pour revenir à l'énoncé de **Michel Lafond** pour lequel $q = 12$ et $n = 3$, on calcule $\mathcal{M}(12, 3) = 299$ et $\mathcal{M}(11, 2) = 67$. La stratégie est bien unique et la première question est « N est-il strictement supérieur à 67 ? ».

Dans une approche assez différente, **Laurent Chéno** modélise un tel jeu avec un arbre de décision. Il s'agit d'un arbre où chaque nœud correspond à une question du type « $N \geq x$? ». Le fils gauche est l'arbre de décision associé à une réponse « non », le fils droit à une réponse « oui ». Les feuilles de l'arbre correspondent aux solutions : si l'on sait que N appartient à $[[a, a]]$, c'est bien sûr que $N = a$. On peut dessiner un arbre de décision en inscrivant l'entier x dans un nœud qui correspond à la question « $N \geq x$? » et en inscrivant l'entier a dans une feuille qui correspond à la solution « $N = a$ ».

Un tel arbre permet de décrire une stratégie gagnante s'il possède exactement 299 feuilles, étiquetées de 1 à 299, et qui seront nécessairement rangées de gauche à droite en ordre croissant, puisque toute feuille du sous-arbre gauche d'un nœud étiqueté par x est strictement plus petite que x , et toute feuille du sous-arbre droit est plus grande. La profondeur d'un arbre est le nombre maximal de questions nécessaires pour suivre une séquence de jeu depuis la racine jusqu'à une feuille. Sans la règle des trois réponses « non », il suffirait de neuf questions, puisqu'un arbre de précision complet de profondeur p possède exactement 2^p feuilles et que $2^9 = 512 > 299$.

Soit $\mathcal{M}(q, n)$ le nombre de feuilles d'un arbre de profondeur q (ce qui correspond à au plus q questions) dont n au plus reçoivent pour réponse « non » (ce qui signifie que dans un chemin allant de la racine à la feuille, on passe au plus n fois par la branche gauche d'un nœud). On va montrer que $\mathcal{M}(12, 3) = 299$, ce qui prouvera l'existence et l'unicité de la stratégie demandée.

Bien sûr, pour $q \geq 2$,

$$\mathcal{M}(q, 1) = 1 + \mathcal{M}(q - 1, 1).$$

En effet, soit on répond « non », et l'on ne peut plus poser de question, soit on répond « oui » et il reste $q - 1$ questions à poser, avec au plus une réponse négative. Facilement, $\mathcal{M}(1, 1) = 2$, puisque les deux réponses sont possibles pour une question donnée. Ainsi,

$$\mathcal{M}(q, 1) = q + 1.$$

Le décompte $\mathcal{M}(2, 2) = 4$ correspond à un arbre binaire complet de profondeur 2, qui a bien quatre feuilles. Puis, pour $q \geq 3$,

$$\mathcal{M}(q, 2) = \mathcal{M}(q - 1, 1) + \mathcal{M}(q - 1, 2),$$

comme on s'en persuade en discutant selon la réponse à la première question. Donc

$$\mathcal{M}(q, 2) = 4 + \sum_{k=3}^q \mathcal{M}(k-1, 1) = 4 + \sum_{k=3}^q k = 4 + \frac{q(q+1)}{2} - 3 = \frac{q^2 + q + 2}{2}.$$

Le décompte $\mathcal{M}(3, 3) = 8$ correspond à un arbre binaire complet de profondeur 3, qui a bien $2^3 = 8$ feuilles. Enfin, pour $q \geq 4$,

$$\mathcal{M}(q, 3) = \mathcal{M}(q - 1, 2) + \mathcal{M}(q - 1, 3),$$

donc

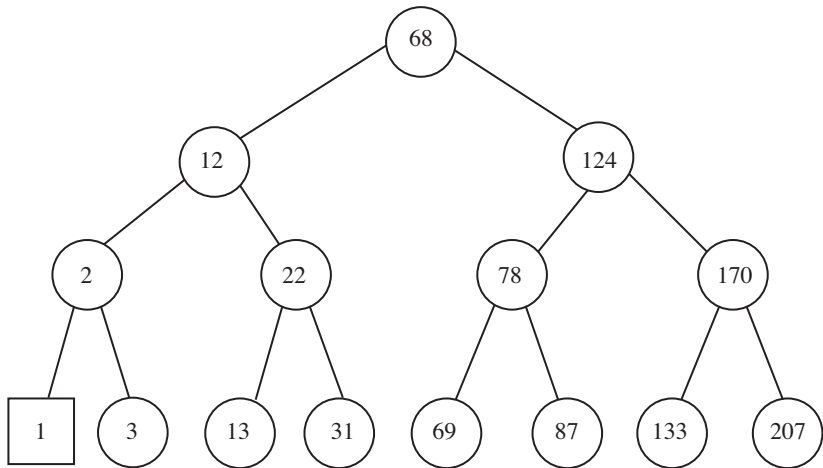
$$\mathcal{M}(q, 3) = 8 + \sum_{k=4}^q \mathcal{M}(k-1, 2) = 4 + \sum_{k=3}^q \frac{(k-1)^2 + (k-1) + 2}{2} = \frac{q^3 + 5q + 6}{6}.$$

En particulier,

$$\mathcal{M}(12, 3) = \frac{1\,728 + 60 + 6}{6} = 299,$$

c'est-à-dire qu'il existe une et une seule stratégie gagnante.

La première question doit permettre de discriminer entre les $\mathcal{M}(11, 2) = 67$ premiers entiers et les $\mathcal{M}(11, 3) = 232$ suivants. Cette première question est donc « $N \geq 68 ?$ ». En cas de réponse négative à la première question, on discrimine les $\mathcal{M}(10, 1) = 11$ premiers entiers et les $\mathcal{M}(10, 2) = 56$ suivants. La question est alors « $N \geq 12 ?$ ». En cas de réponse négative à cette deuxième question, on discrimine entre 1 et les $\mathcal{M}(9, 1) = 10$ entiers suivants. La question est alors « $N \geq 2 ?$ ». Le dessin ci-dessous représente les quatre premières questions.



Ce sont les quatre premiers niveaux de l'arbre correspondant à la stratégie gagnante. On a vu que l'étiquette de la racine vaut $1 + \mathcal{M}(11, 2) = 68$. Mais

$$299 = \mathcal{M}(11, 2) + \mathcal{M}(11, 3) = 67 + 232$$

et

$$232 = \mathcal{M}(10, 2) + \mathcal{M}(10, 3) = 56 + 176.$$

On en déduit que l'étiquette du premier fils droit est

$$68 + 56 = 124.$$

Puis, par exemple,

$$56 = \mathcal{M}(10, 2) = \mathcal{M}(9, 1) + \mathcal{M}(9, 2) = 10 + 46,$$

donc l'étiquette du fils gauche est

$$124 - 46 = 68 + 10 = 78.$$

Et, à leur tour, les deux fils sont étiquetés 69 et 87, car $10 = \mathcal{M}(9, 1) = 1 + 9$, puis $68 + 1 = 78 - 9 = 69$ et $46 = \mathcal{M}(9, 2) = \mathcal{M}(8, 1) + \mathcal{M}(8, 2) = 9 + 37$, puis $78 + 9 = 87$. On laisse au lecteur le soin de compléter le schéma aussi loin qu'il en aura envie.

Jean Lefort utilise également un arbre, dont les nœuds sont notés par un nombre d'au plus douze chiffres en base 2, et contenant au plus trois zéros (par exemple, 111 011 011 101), le chiffre 1 correspondant à une réponse « oui » et le chiffre 0 à une réponse « non ». En fait, le jeu s'arrête après le troisième 0, mais on peut toujours supposer que l'on complète à 12 chiffres à l'aide de 1.

Il y a $\binom{12}{3} = 220$ tels nœuds avec trois zéros, $\binom{12}{2} = 66$ nœuds avec deux zéros,

$\binom{12}{1} = 12$ nœuds avec un seul zéro, et enfin un nœud sans zéro, ce qui donne un total de

$$220 + 66 + 12 + 1 = 299$$

nœuds permettant ainsi 299 réponses. S'il y a une stratégie gagnante, elle est unique.

Ensuite, **Jean Lefort**, **Sophie Toursel** et **Michel Lafond** explorent l'arbre pour construire la stratégie gagnante. Ils trouvent alors la première question.

Pour finir, **Jean Lefort** et **Joël Payen** proposent des algorithmes permettant de programmer ce jeu.

Problème 488-3

Pour un entier $n > 6$, on note $P(n)$ l'ensemble $\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \text{pgcd}(n, k) = 1\}$. Trouver les n pour lesquels les éléments de $P(n)$ sont en progression arithmétique.

Solutions de Jean-François Mallordy (Romagnat), Giovanni Ranieri (Melun), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques).

Jean-François Mallordy commence par déterminer la raison de la progression arithmétique. Soit $n > 6$ tels que les éléments de $P(n)$ soient en progression arithmétique de raison δ . L'entier δ divise $n - 2$ puisque 1 et $n - 1$ appartiennent à $P(n)$. On va montrer que $\delta = 1$ ou 2.

Si 3 ne divise pas n , les entiers 1 et 3 sont dans $P(n)$, donc δ divise $3 - 1 = 2$. Si 3 divise n , on note $n = 3n'$ et l'on distingue deux cas, selon que 3 divise ou non $n' + 1$. Si 3 ne divise pas $n' + 1$, alors $n' + 1$ est premier avec 3 et n' , donc avec $3n' = n$. Ainsi, $n' + 1$ appartient à $P(n)$ et divise n' . Donc δ divise $3n' - (n - 2) = 2$. Dans le second cas, si 3 divise $n' + 1$, alors 3 ne divise pas $n' - 1$. Ainsi, $n' - 1$, qui est premier avec 3 et n' , appartient à $P(n)$ et δ divise $n' - 2$ et aussi $(n - 2) - 3(n' - 2) = 4$. Le cas $\delta = 4$ est exclu car si $\delta = 4$, alors $9 = 1 + 2 \times 4$ appartient à $P(n)$ (on a bien $9 \leq n - 1$), ce qui est absurde puisque 3 divise 9 et n .

Finalement, δ divise 2 donc $\delta = 1$ ou 2. Si $\delta = 1$, n est premier. Si $\delta = 2$, $P(n) = \{1, 3, 5, \dots, n - 1\}$, donc n n'a aucun diviseur premier impair, donc n est une puissance de 2.

Réciproquement, si n est premier ou est une puissance de 2, les éléments de $P(n)$ sont bien en progression arithmétique.

Dans une autre approche, **Pierre Renfer** trouve les deux solutions évidentes (n est premier ou n est une puissance de 2), puis montre que ces solutions sont les seules. Il suppose que $n > 7$ n'est ni premier, ni une puissance de 2. Il écrit alors $n = 2^\alpha m$ et montre que n n'est pas solution, en distinguant trois cas possibles.

Si $\alpha = 0$, alors $m = n$ n'est pas premier, donc est divisible par un facteur premier p strictement inférieur à n . Ainsi, $P(n)$ contient 1 et 2, mais aussi $n - 1$ qui est strictement plus grand que p . Pourtant, $P(n)$ ne contient pas p .

Si $\alpha \geq 1$ et $m \geq 5$, alors $P(n)$ contient $m - 4$, $m - 2$, et $n - 1 > m$, mais ne contient pas m .

Enfin, si $\alpha \geq 2$ et $m = 3$, alors $P(n)$ contient 5 et 7 et $n - 1 > 9$, mais ne contient pas 9.

Enfin, **Giovanni Ranieri** fait l'étude suivante, en distinguant également trois cas.

Si n est impair, 2 appartient à $P(n)$ donc $P(n) = \{1, n - 1\}$ et n est premier.

Si n est pair et premier avec 3, $P(n) = \{1, 3, \dots, n - 1\}$ et alors n est une puissance de 2. En effet, il existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2^\alpha m$ où m est impair. Comme m appartient à $\{1, 3, \dots, n - 1\}$, m est dans $P(n)$ donc $1 = m \wedge n = m$ et $n = 2^\alpha$.

Enfin, reste le cas où n est divisible par 6. On écrit alors $n = 2^\alpha \times 3^\beta \times n'$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ et l'entier n' est premier avec 6. On note p le plus petit nombre premier ne divisant pas n . Ainsi,

$$P(n) = \{1, p, 2p - 1, \dots, k(p - 1) + 1 = n - 1\},$$

où $k = \varphi(n) - 1$ et φ est l'indicatrice d'Euler. L'examen du dernier terme donne la relation

$$k(p - 1) = 2^\alpha \times 3^\beta \times n' - 2. \quad (3)$$

On pose alors $p - 1 = 2^\gamma \times m'$, où m' est impair et γ est strictement positif. La relation (3) donne

$$2^{\gamma-1} k m' = 2^{\alpha-1} \times 3^\beta \times n' - 1.$$

Si $m' > 1$, alors un diviseur premier p' de m' vérifie

$$2 \wedge p' = 1, 3 \wedge p' = 1, n' \wedge p' = 1$$

donc

$$p' \wedge n = 1,$$

et $p' < p$, ce qui contredit la minimalité de p . Ainsi, $m' = 1$ et $p = 2^\gamma + 1$.

Si γ est pair, comme $P(n)$ contient au moins trois termes ($\varphi(n) = 2$ supposerait n premier), le troisième terme de $P(n)$ est

$$2 \times 2^\gamma + 1 \equiv 0 \pmod{3},$$

ce qui est impossible puisque 3 n'appartient pas à $P(n)$.

Si γ est impair, le second terme de $P(n)$ est

$$2^\gamma + 1 \equiv 0 \pmod{3},$$

ce qui aboutit à la même contradiction. Ainsi, dans le troisième cas, $P(n)$ n'est pas en progression arithmétique.