Exercices de-ci, de-là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par Mél à :
bruno.alaplantive@free.fr
ou par courrier à :
Jean Fromentin,
17 rue de la Roussille,
79000 NIORT

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial, une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 495-1 (Jean Gounon – Chardonnay)

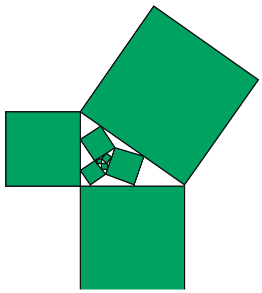
ABC est un triangle non aplati. Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan du triangle tels que les aires des triangles MAB, MBC et MCA soient égales.

Exercice 495-2 (Raphaël Sinteff – Nancy) d'après le sujet de TP Bac S n° 30, juin 2008

Étudier la suite $\left(u_n\right)_{n\geq 1}$ définie par $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n} + 1$ et u_1 réel.

Exercice 495-3 pioché de-ci, de-là …

Étudier(*) cette figure dans laquelle les angles qui semblent être droits, le sont vraiment.



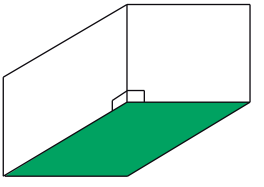
(*) rapports de longueurs, rapports d'aires, ...

Exercice 495-4 (XVIII^e olympiades mathématiques d'Italie (Mai 2002))

Prouver que si $5^n + 3^n + 1$ est premier, alors 12 divise n.

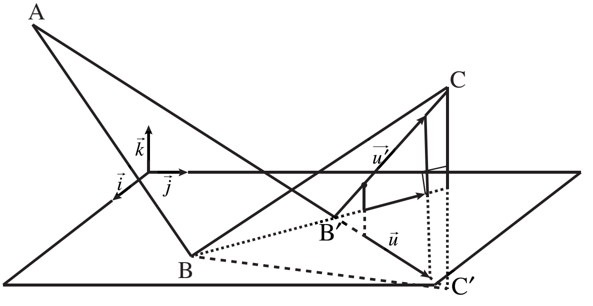
Solutions

Exercice 493-1 (Jean-Yves Le Cadre – Saint Avé)



Voici un trièdre trirectangle composé de trois miroirs.
Un rayon lumineux se réfléchit sur les trois faces successivement.
Que dire du dernier rayon réfléchi ?

Solution de Jean-Yves Le Cadre (Saint Avé)



Soit A-B-C un trajet lumineux avec B dans le plan d'un miroir, A-B et B-C étant rectilignes. Soit C′ le symétrique de C par rapport au plan du miroir. Le trajet A-B-C a alors même longueur que A-B-C′, qui est minimum pour B ∈ [AC′] (la lumière prenant le plus court chemin). Le plan (ABC), contenant (CC′) est alors perpendiculaire au plan du miroir.

Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base orthogonale de l'espace avec $\vec{k}$ orthogonal au plan du miroir.

Par raison de symétrie, on obtient un vecteur directeur du rayon réfléchi en conservant ses composantes sur $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et en changeant le signe de celle sur $\vec{k}$.
Trois réflexions successives (peu importe l'ordre) conduisent à changer le signe des trois composantes du vecteur initial $\vec{u}$.
Un vecteur directeur du dernier rayon réfléchi est alors $-\ \vec{u}$.
Ce dernier rayon réfléchi est donc parallèle au rayon incident.

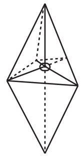
Solution de Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques)

Pour un miroir plan P, les rayons incident et réfléchi sont portés par des droites symétriques par rapport au plan P.
La composée des trois symétries par rapport aux trois plans deux à deux

perpendiculaires est la symétrie centrale par rapport au point d'intersection O des trois plans.
Le dernier rayon réfléchi et le rayon initial sont donc portés par des droites symétriques par rapport au point O.

Autre solution : Michel Sarrouy (Mende).

Remarque. Michel Sarrouy note que ce problème est celui des catadioptres qu'on trouve sur tous les véhicules, dispositifs qui réfléchissent la lumière dans la direction des rayons incidents.
La vision « plus iodée » de Jean-Yves Le Cadre va au réflecteur radar que l'on trouve sur les haubans des voiliers de croisière ; petite pièce métallique placée en haut du mât, dont le modèle serait huit trièdres accolés. Il a pour objet de réfléchir un champ de rayons en direction de celui qui l'émet (bateau ou avion) et de permettre la détection et la localisation du voilier.



L'auteur note également que les sondes météo portent, sous le ballon, un dispositif analogue en feuilles d'aluminium, ce qui permet de les localiser dans l'atmosphère (longitude, latitude, azimut). Eu égard à la vitesse toute relative des mobiles en jeu par rapport à celle de la lumière, on peut les considérer comme immobiles, ce qui valide le modèle utilisé.

Exercice 493-2 (Raphaël Sinteff – Nancy)

Soit la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $u_0 \in \mathbb{N}^*$, pour tout n entier naturel non nul, et $u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{est pair} \\ u_n + 3 & \text{si } u_n \text{est impair} \end{cases}$

Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+3} = u_n$ ou $u_{n+2} = u_n$.

Solution de Raymond Heitz (Lavergne)

Si pour un indice k, u_k est pair et strictement supérieur à 6, on a :

$$\left.\begin{array}{ll} u_{k+2} = \dfrac{u_k}{4} & \text{si } \dfrac{u_k}{2} \text{ est pair} \\ u_{k+2} = \dfrac{u_k}{2} + 3 & \text{si } \dfrac{u_k}{2} \text{ est impair} \end{array}\right\} \text{donc } u_{k+2} < u_k .$$

Si pour un indice k, u_k est impair et strictement supérieur à 3, on a :

$$u_{k+2} = \frac{u_k + 3}{2}; \text{ donc } u_{k+2} < u_k .$$

En itérant on tombe nécessairement sur un indice n_0 tel que

$$u_{n_0} = 1 \text{ ou } 2 \text{ ou } 3 \text{ ou } 4 \text{ ou } 6.$$

On a alors une des séquences :

$1 \to 4 \to 2 \to 1$ (période 3) ; $2 \to 1 \to 4 \to 2$ (période 3) ; $3 \to 6 \to 3$ (période 2) ; $4 \to 2 \to 1 \to 4$ (période 3) ; $6 \to 3 \to 6$ (période 2).

Autres solutions : Raphaël Sinteff (Nancy), Robert Bourdon (Tourgeville), Jean-Claude Carréga (Lyon), Jean Gounon (Chardonnay).

Exercice 493-3 (pioché de-ci, de-là…)

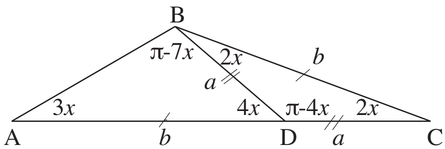
Dans le triangle ABC, D est un point du segment [AC].

On a de plus : AD = BC ; BD = DC ; $\widehat{\mathrm{DBC}} = 2x$ et $\widehat{\mathrm{DAB}} = 3x$.

On demande la valeur de x.

Solution de Fabrice Laurent (Provins)

<u>Schéma et notations</u>
On peut facilement exprimer tous les angles de cette figure en fonction de x.
De plus, on note :
BD = CD = a et BC = AD = b.



<u>Mise en équation</u>

Le théorème des sinus dans le triangle ABD donne : $\dfrac{\sin(3x)}{a} = \dfrac{\sin(\pi - 7x)}{b}$ soit $\dfrac{\sin(3x)}{\sin(7x)} = \dfrac{a}{b}$.

Le théorème des sinus dans le triangle BCD donne : $\dfrac{\sin(2x)}{a} = \dfrac{\sin(\pi - 4x)}{b}$ soit $\dfrac{\sin(2x)}{\sin(4x)} = \dfrac{a}{b}$.

L'égalité de ces deux rapports donne l'équation : $\sin(2x)\sin(7x) = \sin(3x)\sin(4x)$.

<u>Résolution de l'équation</u>

On utilise la formule d'Euler : $\sin(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$.

Après développement, l'équation devient :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}9x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}5x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}5x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}9x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}7x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}7x}.$$

En multipliant les deux membres de l'équation par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}9x}$, puis en posant $\mathrm{X} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, on obtient l'équation :

$$1 - \mathrm{X}^2 - \mathrm{X}^4 + \mathrm{X}^8 + \mathrm{X}^{10} - \mathrm{X}^{14} - \mathrm{X}^{16} + \mathrm{X}^{18} = 0.$$

Après factorisation :

$$\left(\mathrm{X}-1\right)^2\left(\mathrm{X}+1\right)^2\left(\mathrm{X}^2+1\right)\left(1-\mathrm{X}^6+\mathrm{X}^{12}\right)=0.$$

Les solutions obtenues à partir des trois premiers facteurs sont : $x=0, x=\pi$ et $x=\dfrac{\pi}{2}$.
Ces trois solutions sont à rejeter pour le problème.

Les solutions obtenues à partir du qatrième facteur sont : $\mathrm{X}^6=\mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{3}}$, ce qui donne la solution « géométriquement acceptable » : $x=\dfrac{\pi}{18}$ radians, soit $x=10°$.

Solution de Bruno Alaplantive (Calgary)

Solution ne relevant que de la seule géométrie élémentaire.

On a immédiatement $\widehat{\mathrm{BCD}}=2x$ et $\widehat{\mathrm{BDA}}=4x$.
Dans BDA on construit le triangle ADE semblable à BDC ; on a :

$$\widehat{\mathrm{EAD}}=\widehat{\mathrm{ADE}}=\widehat{\mathrm{EDB}}=2x.$$

Le triangle EDB est isocèle, donc $\widehat{\mathrm{DEB}}=90°-x$

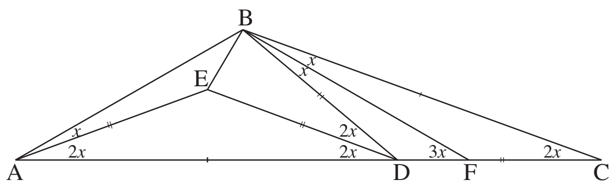
La bissectrice de $\widehat{\mathrm{DBC}}$ coupe [DC] en F. On a

$$\widehat{\mathrm{BFA}}=\widehat{\mathrm{BCF}}+\widehat{\mathrm{CBF}}=3x.$$

Alors le triangle BAF est isocèle et BA = BF.
Les triangles BDF et AEB sont isométriques (BD = AE, BF = AB et $\widehat{\mathrm{DBF}}=\widehat{\mathrm{EAB}}=x$).
Ainsi, autour de E,

$$\widehat{\mathrm{DEA}}+\widehat{\mathrm{AEB}}+\widehat{\mathrm{BED}}=180°-4x+180°-4x+90°-x=360°$$

et finalement on obtient $x=10°$.



Autres solutions : Guy Brusco (La Garde), Jean-Claude Carréga (Lyon), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Michel Sarrouy (Mende), Robert Bourdon (Tourgeville), Raymond Heitz (Lavergne), Albert Marcout (Sainte Savine).

Remarque. Comme celle de Fabrice Laurent, toutes ces autres solutions relèvent de l'utilisation initiale du théorème des sinus.
La manipulation adroite de formules trigonométriques (dont la relation 2 cos a sin b

= sin(a + b) + sin(a − b)) permet à Raymond Heitz de transformer assez rapidement l'équation initiale en 2 sin x cos (6x) = sin x, et de conclure.
Pour élémentaire qu'elle soit, la solution que je propose pour ma part, a le défaut principal de « sortir » de nulle part… !

Nota. Cet exercice est issu de l'excellent site **Geometry Step by Step from the Land of the Incas** : www.agutie.homestead.com/ qui en regorge littéralement et sur lequel je vous invite à aller vagabonder et rêver… !

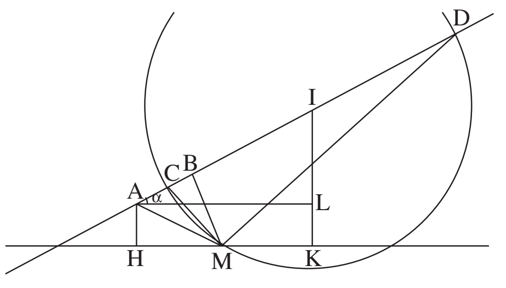
Exercice 493-4 (Georges Lion – Wallis)

Une droite d étant donnée ainsi que deux points distincts A et B hors de d.

Déterminer les points de d en lesquels la fonction définie par $\mathrm{M} \mapsto \dfrac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}$ atteint ses extrema (lorsque ces atteintes ont lieu).

Solution de Robert Bourdon (Tourgeville)

Robert Bourdon s'est intéressé au calcul de la valeur maximale – lorsqu'elle existe – de ce rapport. Sans reproduire in extenso tous les calculs, voici les grandes lignes de son raisonnement.



Le fil conducteur est d'introduire les points C et D de la droite (AB), qui vérifient

$$\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}} = \frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{DB}} = \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = k,$$

avec C dans [AB] (D n'existe pas lorsque k = 1).
Les droites (MC) et (MD) sont les bissectrices de (MA) et (MB). Elles sont donc perpendiculaires.
À partir de la configuration ci-dessus, dans laquelle I désigne le centre du cercle circonscrit au triangle CMD, et d'égalités vectorielles telles que

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = -k\overrightarrow{\mathrm{CB}}.$$

la traduction de l'inégalité IM ≥ IK donne

$$k^2\left(h + \sin\alpha\right) - k - h \leq 0$$

où h désigne le rapport $\dfrac{\text{AH}}{\text{AB}}$ et α l'angle formé par les droites d et (AB).
Ainsi dans cette configuration, le nombre k qui doit être compris entre les racines est maximal quand il vaut :

$$\frac{1+\sqrt{4h^2+4h\sin\alpha+1}}{2(h+\sin\alpha)}.$$

Solution de Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques)

Les lignes de niveau de la fonction qui à M associe le rapport $\dfrac{\text{MA}}{\text{MB}}$ sont les cercles du faisceau linéaire $\mathcal{F}$ de cercles, à points de Poncelet A et B (la ligne de niveau 1 étant l'axe radical δ du faisceau).
La fonction atteint un extremum en un point M sur d si ce point M appartient à un cercle du faisceau tangent à d.

1) **Cas général** : d et l'axe radical δ sont sécantes en un point I.
Si un cercle c du faisceau $\mathcal{F}$ est tangent en M à d, le cercle c' de centre I et de rayon IM est orthogonal au cercle c.
Donc le cercle c' appartient au faisceau conjugué $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ et il passe par A et B.
Donc $\text{IM} = \text{IA} = \text{IB}$.
Il y a deux solutions, les deux points d'intersection de d et du cercle de centre I, de rayon $\text{IA} = \text{IB}$.
La solution plus proche de A que de B correspond à un minimum (strictement inférieur à 1) et l'autre à un maximum (strictement supérieur à 1).

2) **Cas particulier** : d et l'axe radical δ sont parallèles.
Si $d = \delta$, la fonction est constante, égale à 1.
Si d est strictement parallèle à δ, il n'y a qu'un cercle du faisceau $\mathcal{F}$ tangent à d, le point de contact étant le point d'intersection de des droites d et (AB). Cette solution unique correspond à un minimum (strictement inférieur à 1) si d est plus proche de A que de B et à un maximum (strictement supérieur à 1) sinon.

Autre solution : Georges Lion (Wallis), Albert Marcout (Sainte Savine).

Nota. Un fichier Geogebra illustrant la solution de Robert Bourdon est disponible sur le site de l'APMEP.