Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART
13, rue des Garennes
63 800 Cournon d'Auvergne
ou
hochartmax@yahoo.fr

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 494-1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{Z}[X]$ tels que l'équation

$$|\mathrm{P}(k)| = 1$$

admette n racines distinctes dans $\mathbb{Z}$. Montrer que

$$n - \deg(\mathrm{P}) \leq 2.$$

Problème 494-2 (Question de Jean-Christophe Laugier (Rochefort))

Démontrer, de manière combinatoire si possible, l'égalité suivante, valable pour tous les entiers n, k supérieurs ou égaux à 1 :

$$\sum_{\substack{u_1+u_2+\cdots+u_k=n \\ u_1,u_2,\cdots,u_k\in\mathbb{N}^*}} \prod_{j=1}^{k} u_j = \binom{n+k-1}{2k-1}.$$

Problème 494-3 (Question de Moubinool Omarjee (Lycée Jean-Lurçat, Paris))

Pour $t > 0$, on définit

$$\mathrm{H}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!(n+1)!}.$$

Montrer que

$$\mathrm{H}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\mathrm{e}^{2\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}}.$$

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 487-2 (Question de Michel Lafond)

On définit la suite u par $u_0 \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2\min(u_n, 1 - u_n)$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{\pi}\arccos\left(\cos\left(2^n \pi u_0\right)\right).$$

Solutions de Jean-Claude Carréga (Lyon), Benoît David (Ferney-Voltaire), Franck Gautier (Pérignat lès Sarliève), Raymond Heitz (Lavergne), Michel Lafond (Dijon), Albert Marcourt (Sainte Savine), Joël Payen (Gagny), Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques), Odile Simon (La Prénessaye)

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que u_n appartient au segment $[0,1]$. L'initialisation fait partie des hypothèses et l'on suppose donc que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, u_n appartient à $[0,1]$.

Si $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, alors $u_n \leq 1 - u_n$, donc

$$u_{n+1} = 2u_n = 1 + \left(2u_n - 1\right) = 1 - \left|2u_n - 1\right| \in [0,1].$$

Si $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, alors $u_n \geq 1 - u_n$, donc

$$u_{n+1} = 2\left(1 - u_n\right) = 1 - \left(2u_n - 1\right) = 1 - \left|2u_n - 1\right| \in [0,1],$$

ce qui termine la récurrence et établit de plus la relation

$$u_{n+1} = 1 - \left|2u_n - 1\right| \qquad \left(n \in \mathbb{N}\right). \tag{1}$$

De (1), on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\cos\left(\pi u_{n+1}\right) = \cos\left(\pi - \left|2\pi u_n - \pi\right|\right) = -\cos\left(2\pi u_n - \pi\right) = \cos\left(2\pi u_n\right) \tag{2}$$

On démontre alors par récurrence la relation

$$\cos\left(\pi u_n\right) = \cos\left(2^n \pi u_0\right) \qquad \left(n \in \mathbb{N}\right).$$

Pour $n = 0$, c'est évident et pour $n = 1$, cela découle de (2) avec $n = 0$. Si l'on suppose la relation vraie jusqu'à un certain rang n, d'après la relation (2),

$$\cos\left(\pi u_{n+1}\right) = \cos\left(2\pi u_n\right) = 2\cos^2\left(\pi u_n\right) - 1 = 2\cos^2\left(2^n \pi u_0\right) - 1 = \cos\left(2^{n+1} \pi u_0\right).$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\cos\left(\pi u_n\right) = \cos\left(2^n \pi u_0\right).$$

Comme πu_n appartient à $[0,\pi]$, on obtient bien

$$\pi u_n = \arccos\left(\cos\left(2^n \pi u_0\right)\right).$$

Quelques commentaires.

1. **Albert Marcourt** demande comment **Michel Lafond** a découvert ce résultat. **Michel Lafond** ne se remémore pas complètement la genèse de cet énoncé mais pense s'être inspiré d'un problème publié il y a une vingtaine d'années dans la revue *The American Mathematical Monthly*.

2. La relation $u_{n+1} = 1 - |2u_n - 1|$ est la relation classique

$$\min(a,b) = \frac{1}{2}\left(a + b - |a-b|\right)$$

que l'on démontre en remarquant que

$$\max(a,b) + \min(a,b) = a + b$$

et

$$\max(a,b) - \min(a,b) = |a-b|.$$

3. **Raymond Heitz** remarque que, dans le cas où u_0 est rationnel, la suite est périodique à partir d'un certain rang. Effectivement, soit u_0 un rationnel que l'on écrit

$$u_0 = \frac{a}{2^q b},$$

avec a, $b \in \mathbb{Z}$, b impair et $q \in \mathbb{N}$. Notons alors ω l'ordre de 2 dans le groupe multiplicatif des unités de l'anneau $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z},+,\times)$. Ainsi,

$$2^\omega \equiv 1 \mod b.$$

Montrons qu'à partir du rang $q+1$, la suite admet ω pour période. Puisque la suite u est du type $u_{n+1} = f(u_n)$, il suffit de montrer que $u_{q+1+\omega} = u_{q+1}$ pour conclure. Or, avec la formule qui constituait l'énoncé du problème, on peut écrire

$$\pi u_{q+1+\omega} = \arccos\left(\cos\left(2^{q+1+\omega}\pi u_0\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{2^\omega \times 2a\pi}{b}\right)\right).$$

Par définition de ω, il existe $\mathrm{K} \in \mathbb{N}$ tel que

$$2^\omega = 1 + \mathrm{K}b.$$

Ainsi,

$$\pi u_{q+1+\omega} = \arccos\left(\cos\left(\frac{(1+\mathrm{K}b)\times 2a\pi}{b}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{2a\pi}{b}\right)\right) = \pi u_{q+1}.$$

Problème 488-2

Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 4u_n + \sqrt{15u_n^2 + 1}$. Cette suite est-elle à valeurs entières ?

Solutions de Pierre Aymard (Albi), Jean-Claude Blanchard (Brunoy), Maurice Bauval (Versailles), Laurent Chéno (Lycée Dorian, Paris 11e), Marie-Laure Chaillout (Épinay sur Orge), Bernard Collignon (Lycée Diderot, Narbonne), Jean-Pierre Friedelmeyer (Strasbourg), Franck Gautier (Pérignat lès Sarliève), Raymond Heitz (Lavergne), Michel Lafond (Dijon), Jean Lefort (Wintzenheim), Georges Lion (Wallis), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Jean-Claude Renoult (Bergerac), Vincent Thill (Migennes), Éric Trotoux (Caen).

Pierre Aymard calcule les premières valeurs de la suite :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 8,\ u_2 = 63 = 8u_1 - 1,\ u_3 = 496 = 8u_2 - 1,\ u_4 = 3\,905 = 8u_3 - 1,$$

puis constate que la suite u est strictement positive, strictement croissante. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$15u_n^2 + 1 = \left(u_{n+1} - 4u_n\right)^2 = u_{n+1}^2 - 8u_n u_{n+1} + 16u_n^2,$$

donc

$$u_{n+1}^2 - 8u_n u_{n+1} + u_n^2 = 1.$$

De même,

$$u_{n+2}^2 - 8u_{n+1} u_{n+2} + u_{n+1}^2 = 1.$$

La différence de ces deux égalités donne

$$\left(u_{n+2} - u_n\right)\left(u_{n+2} - 8u_{n+1} + u_n\right) = 0,$$

donc

$$u_{n+2} = 8u_{n+1} - u_n.$$

Cette relation de récurrence et les conditions initiales $u_0 = 1$, $u_1 = 8$, permettent de conclure.

Laurent Chéno, **Bernard Collignon**, **Georges Lion**, **et Jean-Claude Renoult** établissent également cette formule. Dans les grandes lignes, les idées sont les mêmes.

Éric Trotoux montre par récurrence que u_n et $\sqrt{15u_n^2 + 1}$ sont entiers, ce qui permet de conclure. Il mentionne également la relation de récurrence linéaire double signalée plus haut.

Jean-Claude Blanchard établit cette relation de façon différente. Il considère l'application

$$f:\begin{cases}[0,+\infty[\to[1,+\infty[\\ x\mapsto 4x+\sqrt{15x^2+1}\end{cases},$$

montre qu'elle est bijective, de réciproque

$$f^{-1}:\begin{cases}[1,+\infty[\to[0,+\infty[\\ x\mapsto 4x-\sqrt{15x^2+1}\end{cases}.$$

Il constate alors que, pour $x > 1$,

$$f(x)+f^{-1}(x)=8x.$$

En testant en $x = u_{n+1}$, on obtient alors la fameuse relation

$$u_{n+2}=8u_{n+1}-u_n.$$

On retrouve cette application f dans les solutions de **Georges Lion** et **Bernard Collignon**. Ils notent C la courbe représentative de l'application

$$f:x\in\mathbb{R}\mapsto 4x+\sqrt{15x^2+1}$$

et F l'application de C dans C définie par

$$\left(x,y=f(x)\right)\mapsto\left(y,f(y)\right).$$

La réciproque de F est

$$\left(x',f(x')\right)\mapsto\left(4x'-\sqrt{15x'^2+1},x'\right).$$

Ces deux applications préservent l'ensemble des points de C dont les coordonnées sont entières. Cela prouve que l'ensemble des points (u_n,u_{n+1}) réunis avec leurs symétriques par rapport aux droites d'équations $y = x$ et $y = -x$ sont – en dehors de $(\pm1,0)$ et $(0,\pm1)$ – les seuls points entiers de l'hyperbole d'équation

$$x^2-8xy+y^2=1.$$

Pour finir avec cette approche basée sur la relation de récurrence linéaire double, **Maurice Bauval** calcule également les premiers termes et conjecture la relation

$$u_{n+2}=8u_{n+1}-u_n.$$

Il introduit alors la suite récurrente linéaire

$$v_0=1, v_1=8, v_{n+2}=8v_{n+1}-v_n$$

qu'il explicite par l'équation caractéristique et montre ensuite que (v_n) vérifie l'équation définissant (u_n). Comme $u_0 = v_0$, les suites sont égales.

Une seconde approche possible, proposée par **Bernard Collignon**, **Laurent Chéno**, **Jean-Pierre Friedelmeyer**, **Franck Gautier**, **Raymond Heitz** et **Pierre Renfer**, est de relier ce problème à l'équation de Pell Fermat

$$x^2 - \mathrm{D}y^2 = 1,$$

l'entier D (ici, 15) étant sans facteur carré. Par la formule du binôme, on montre que, pour n ∈ ℕ,

$$\left(4+\sqrt{15}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{15} \qquad (3)$$

et

$$\left(4-\sqrt{15}\right)^n = x_n - y_n\sqrt{15} \qquad (4)$$

où les expressions x_n, y_n sont entières, puisque

$$x_n = \sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} 4^{n-k} 15^{\frac{k}{2}},$$

et

$$y_n = \sum_{k \text{ impair}} \binom{n}{k} 4^{n-k} 15^{\frac{k-1}{2}}.$$

Comme

$$x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{15} = \left(4+\sqrt{15}\right)^{n+1},$$

on peut écrire

$$x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{15} = \left(4+\sqrt{15}\right)\left(x_n + y_n\sqrt{15}\right) = \left(4x_n + 15y_n\right) + \left(4y_n + x_n\right)\sqrt{15}.$$

L'irrationalité de $\sqrt{15}$ permet d'identifier

$$x_{n+1} = 4x_n + 15y_n, \quad y_{n+1} = x_n + 4y_n. \qquad (5)$$

Par ailleurs, le produit des deux relations (3) et (4) donne

$$x_n^2 - 15y_n^2 = 1,$$

soit

$$x_n = \sqrt{1+15y_n^2}.$$

La suite $\left(y_n\right)$ est alors définie par la relation

$$y_{n+1} = 4y_n + \sqrt{1+15y_n^2}$$

et la condition initiale $y_1 = 1$. Le terme général de la suite étudiée dans l'énoncé n'est jamais que

$$u_n = y_{n+1} = \sum_{k \text{ impair}} \binom{n+1}{k} 4^{n+1-k} 15^{\frac{k-1}{2}}$$

et est donc entier.

Vincent Thill propose un algorithme basé sur les relations (5) donnant x_{n+1}, y_{n+1} en fonction de x_n, y_n.

Maurice Bauval, **Bernard Collignon**, **Raymond Heitz** et **Pierre Renfer** donnnent l'expression classique des solutions de l'équation de Pell Fermat :

$$u_n = \frac{1}{2\sqrt{15}}\left(\left(4+\sqrt{15}\right)^{n+1} - \left(4-\sqrt{15}\right)^{n+1}\right),$$

que **Jean-Claude Renoult** donne sous la forme

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{sh}\left((n+1)\ln\left(4+\sqrt{15}\right)\right).$$

Également inspiré par l'équation de Pell Fermat, **Jean Lefort** cherche les valeurs de x pour lesquelles $15x^2 + 1$ est un carré parfait. Pour résoudre l'équation

$$x^2 - 15y^2 = 1,$$

il utilise les réduites d'ordre pair $\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$ de la décomposition en fraction continue de

$$\sqrt{15} = [3,1,6,1,6,1,\ldots],$$

ce qui donne

$$p_{2n} = p_{2n-1} + p_{2n-2},$$

$$p_{2n-1} = 6p_{2n-2} + p_{2n-3},$$

$$p_{2n-2} = p_{2n-3} + p_{2n-4},$$

On en déduit que

$$p_{2n} = 8p_{2n-2} - p_{2n-4},$$

avec les conditions initiales $p_0 = 1$ et $p_2 = 4$, tandis que

$$q_{2n} = 8q_{2n-2} - q_{2n-4},$$

avec les conditions initiales $q_0 = 0$ et $q_2 = 2$. Les valeurs successives qui font de $15x^2 + 1$ un carré parfait sont donc données par la suite

$$x_0 = 0, x_1 = 2, x_{n+2} = 8x_{n+1} - x_n,$$

d'où l'on déduit la relation

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{15}}\left(\left(4+\sqrt{15}\right)^{n} - \left(4-\sqrt{15}\right)^{n}\right).$$

Un calcul facile donne alors

$$4x_n + \sqrt{15x_n^2 + 1} = x_{n+1}.$$

La condition initiale $x_0 = 0$ montre que cette suite (x_n) n'est autre que la suite

(u_n) décalée d'un indice.

Enfin, **Raymond Heitz** mentionne un article en rapport avec cet exercice, dû à **Maurice Glaymann**, intitulé « Une petite situation pour une grande pédagogie », paru dans le bulletin numéro 310 de septembre 1977 (pages 631 et suivantes).

Quelques lecteurs proposent des généralisations. Par exemple, **Jean-Pierre Friedelmeyer** part de l'équation de Pell-Fermat

$$x^2 - 7y^2 = 1$$

et suggère l'énoncé suivant : la suite définie par $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1} = 8u_n + 3\sqrt{7u_n^2 + 1}$$

est-elle à valeurs entières ?

De son côté, **Michel Lafond** étudie les suites définies par

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = tu_n + \sqrt{\left(t^2 - 1\right)u_n^2 + 1}, \tag{6}$$

où t est un paramètre réel supérieur ou égal à 1. On a alors

$$u_{n+1} - tu_n = \sqrt{\left(t^2 - 1\right)u_n^2 + 1},$$

On élève au carré

$$u_{n+1}^2 + t^2u_n^2 - 2tu_nu_{n+1} = \left(t^2 - 1\right)u_n^2 + 1.$$

Puis l'on ajoute des deux côtés $t^2u_{n+1}^2 - t^2u_n^2$:

$$u_{n+1}^2 + t^2u_{n+1}^2 - 2tu_nu_{n+1} = t^2u_{n+1}^2 - u_n^2 + 1,$$

soit encore

$$t^2u_{n+1}^2 + u_n^2 - 2tu_nu_{n+1} = t^2u_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 + 1,$$

et enfin

$$\left(tu_{n+1} - u_n\right)^2 = \left(t^2 - 1\right)u_{n+1}^2 + 1.$$

La condition $t > 1$ et la relation (6) montrent que

$$tu_{n+1} \geq u_{n+1} \geq u_n,$$

donc

$$tu_{n+1} - u_n = \sqrt{\left(t^2 - 1\right)u_{n+1}^2 + 1} = u_{n+2} - tu_{n+1}.$$

Ainsi, une suite donnée par (6) vérifie

$$u_{n+2} = 2tu_{n+1} - u_n$$

et est entièrement déterminée par ses conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 2t$. En particulier cette suite est à valeurs entières dès que t est un demi-entier (ou un entier) supérieur ou égal à 1. Pour $t = 4$, on retrouve l'énoncé. Un autre exemple est obtenu en prenant $t = \dfrac{3}{2}$: la suite définie par

$$u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + \sqrt{\frac{5}{4}u_n^2 + 1}$$

est une suite à valeurs entières.

Généralisant cette idée, **Marie-Laure Chaillout** introduit les suites définies, pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, par les conditions initiales

$$u_0 = 0, u_1 = 1$$

et (sous réserve d'existence) par la relation

$$u_{n+1} = \frac{a}{2}u_n + \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b\right)u_n^2 + (-b)^n}.$$

À une telle suite, est associée la suite v définie par

$$v_0 = 0, v_1 = 1, v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n.$$

On commence par montrer que la suite u est bien définie. Pour cela, on pose $\mathrm{A}_0 = 1$ et pour $n \geq 1$,

$$\mathrm{A}_n = \left(\frac{a^2}{4} + b\right)u_n^2 + (-b)^n.$$

Si $\mathrm{A}_n \geq 0$, alors

$$\mathrm{A}_{n+1} = \left(\frac{a^2}{4} + b\right)u_{n+1}^2 + (-b)^{n+1},$$

et un petit calcul montre que

$$\mathrm{A}_{n+1} = \left(\frac{a}{2}u_{n+1} + bu_n\right)^2.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}_n \geq 0$ et la suite u est bien définie. De plus, elle est donnée par les conditions initiales

$$u_0 = 0, u_1 = 1$$

et la relation

$$u_{n+1} = \frac{a}{2}u_n + \left|\frac{a}{2}u_n + bu_{n-1}\right| \quad \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$$

Pour un n fixé, si $\dfrac{a}{2}u_n + bu_{n-1} \geq 0$, alors

$$u_{n+1} = au_n + bu_{n-1},$$

tandis que si $\frac{a}{2}u_n + bu_{n-1} < 0$, alors

$$u_{n+1} = -bu_{n-1}.$$

Ceci permet déjà de conclure que pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, la suite u est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.De plus, si a appartient à $\mathbb{N}$, la suite u est à valeurs positives.

On cherche maintenant à quelles conditions les suites u et v sont égales. Les suites u, v vérifient $u_0 = v_0 = 0$ et $u_1 = v_1 = 1$. Si $u \neq v$, on choisit

$$m = \inf\left\{n \in \mathbb{N} \middle| u_{n+1} \neq v_{n+1}\right\}.$$

Si $a < 0$, alors $u_2 = 0 \neq v_2 = a$, donc $u \neq v$.

Si $a = 0$, alors $u_2 = v_2 = 0$ et pour tout n $\in \mathbb{N}$,

$$u_{2n} = v_{2n} = 0, u_{2n+1} = |b|^n, v_{2n+1} = b^n.$$

Donc $u = v$ si et seulement si $b > 0$.

Si $a > 0$, la condition $u_{m+1} \neq v_{m+1}$ impose

$$\frac{a}{2}u_m + bu_{m-1} < 0,$$

donc

$$\left(\frac{a^2}{4} + b\right)u_{m-1} + \frac{a}{2}\sqrt{\mathrm{A}_{m-1}} < 0.$$

Comme u_{m-1} est strictement positif, on en déduit que

$$\frac{a^2}{4} + b < 0.$$

Réciproquement, si $a > 0$ et si $\frac{a^2}{4} + b < 0$, alors le trinôme $\mathrm{P}(x) = x^2 - ax - b$ admet deux racines complexes conjuguées non réelles x_1 et x_2, à savoir

$$x_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Il existe $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que

$$x_1 = \sqrt{-b}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, x_2 = \sqrt{-b}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}.$$

Classiquement, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n.$$

Avec les conditions initiales $v_0 = 0$ et $v_1 = 1$, on trouve

$$v_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} = (-b)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}.$$

On considère le développement dyadique de $\frac{\theta}{\pi}$:

$$\frac{\theta}{\pi} = \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{\varepsilon_j}{2^j} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_j \in \{0,1\}.$$

Il existe $k = \inf\{j \in \mathbb{N} \mid \varepsilon_j = 1\}$, donc il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que

$$(2l+1)\pi \leq 2^k\theta < (2l+2)\pi.$$

Ainsi,

$$\sin(2^k\theta) < 0 \quad \text{ou} \quad \sin((2^k+1)\theta) < 0.$$

Il existe donc un $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_n < 0$ alors que $u_n > 0$. Donc $u \neq v$.
En conclusion, la suite définie par

$$u_0 = 0, u_1 = 1$$

et par la relation

$$u_{n+1} = \frac{a}{2}u_n + \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + b\right)u_n^2 + (-b)^n}$$

vérifie la relation de récurrence

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

si et seulement si les suites u et v sont égales, c'est-à-dire si et seulement si

$$a \geq 0 \text{ et } \frac{a^2}{4} + b \geq 0.$$

Si $a = 8$ et $b = -1$, on retrouve la suite de l'énoncé et la relation

$$u_{n+2} = 8u_{n+1} - u_n.$$

Le cas $a = b = 1$ donne la suite de Fibonacci.