Un générateur aléatoire de pile ou face venu d'ailleurs

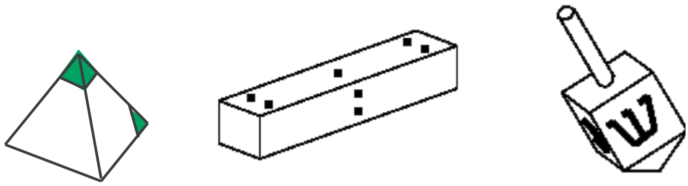
Bernard Parzysz(*)

1. Introduction

Dans les diverses civilisations, un certain nombre de jeux font intervenir des générateurs aléatoires divers et variés. Ce sont notamment, en Occident, les pièces de monnaie, les dés cubiques, les sacs contenant des jetons (loto), les roues (loteries), les boules tombant dans des trous (roulette, boule), etc., sans parler de l'aiguille de Buffon… Et il en existe bien d'autres, par exemple :

* À Sumer, vers 2500 avant notre ère, on pratiquait un jeu de table utilisant des *dés tétraédriques* dont deux sommets étaient marqués (*fig. 1A*). Lorsqu'on lance un tel dé, l'un des sommets se trouve au-dessus du plan des trois autres, et on a théoriquement une chance sur deux que ce sommet soit marqué ([2] p. 57).

* Homère mentionne qu'on jouait avec quatre *osselets* (astragales de mouton), jeu qui fut très répandu dans l'Antiquité(1). Lorsqu'on le lance, un osselet peut présenter quatre de ses faces comme face supérieure : la face la plus plane vaut 1 point, la face opposée (sinueuse) vaut 6 points, la face concave vaut trois points et la face convexe vaut 4 points ([**1**] pp. 358-360).



A **B** **C**

Figure 1

* En Inde, différents jeux de table, comme le *chausar* ([2] p. 29) font usage de trois *dés oblongs à section carrée*, généralement en ivoire, dont chacune des quatre faces rectangulaires porte 1, 2, 5 ou 6 points (*fig. 1B*). Lorsqu'on lance les dés, ils retombent sur l'une de leurs faces rectangulaires et – comme avec « nos » dés cubiques – la somme des points des trois faces supérieures donne les points marqués.

* À l'occasion de la fête de Hanoukkah, les enfants juifs jouent avec une toupie à corps cubique (*sevivon* en hébreu, *dreidel* en yiddish) sur les quatre faces latérales de

(*) Université d'Orléans & Laboratoire André Revuz (université Paris-Diderot).
parzysz.bernard@wanadoo.fr

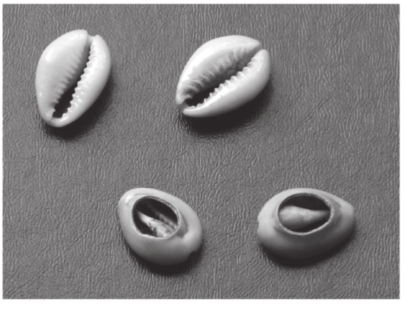
(1) On utilisait aussi un osselet pour le *senet*, jeu de table pratiqué en Égypte depuis l'époque prédynastique.

laquelle est inscrite une lettre différente (*fig. 1C*). Cette toupie trouve son origine dans l'Allemagne médiévale, « *où elle jouissait d'une grande popularité parmi les joueurs et les passionnés de jeux de hasard* » ([2] p. 142).

2. Les jeux de cauris en Afrique

Je voudrais maintenant m'intéresser à l'Afrique occidentale, et à un petit coquillage, originaire de l'Océan indien, qui y est très répandu (il servait jadis de monnaie) : le *cauri* (*Cypraea moneta*) qui, à l'état naturel, présente une face bombée et une face plane traversée par une ouverture longitudinale. De nos jours, les cauris sont utilisés dans la divination, dans la décoration et dans certains jeux(2), après avoir subi une modification consistant à rogner la face bombée pour l'aplanir (*fig. 2A*), afin que le cauri puisse tenir en équilibre sur cette face. Après le lancer, un cauri peut présenter comme face supérieure, soit la face avec l'ouverture (fente), soit la face bombée rognée (dos) ; il présente avec l'osselet la particularité de ne pas renvoyer à un modèle canonique d'équiprobabilité, contrairement aux pièces, aux dés (qu'ils soient cubiques, tétraédriques ou oblongs) ou à la toupie :

> « Le cauri n'est pas une pièce fabriquée industriellement, à l'instar d'une pièce de monnaie ou d'un dé ; sa partie bombée est la plupart du temps rognée de façon artificielle. De plus, tous les cauris, bien qu'ayant des caractéristiques communes, ne sont pas parfaitement identiques. Il ne s'avère donc plus possible, comme dans le cas d'une pièce de monnaie, de déterminer intuitivement la probabilité de l'apparition d'un des côtés. » ([3] p. 63)



A
Cauris

B
Jeton d'abbia

Figure 2 (cl. B.P.)

Notons enfin que les cauris peuvent être remplacés par des coquilles de bivalves, des coques d'arachide – ou des baguettes creuses – coupées en deux longitudinalement, ou par des jetons en coque de fruit, comme dans le jeu d'*abbia* du Cameroun (*fig. 2B*).

Plusieurs jeux africains utilisent le lancer simultané de quatre cauris. Il y a donc cinq configurations possibles, selon le nombre de fentes qui apparaissent. Dans certains

(2) C'est également le cas en Inde : dans le jeu de *pachisi* on lance simultanément six cauris ([2] p. 27).

jeux, un nombre de points est affecté à chacune de ces configurations, mais dans d'autres jeux(3) on ne distingue que deux cas : la configuration est favorable ou défavorable [3]. De façon très générale(4), les configurations favorables sont celles qui comportent un nombre pair de « fentes » (F), et donc un nombre pair de « dos » (D). Plus précisément, il y a :

– trois configurations favorables : 4F 0D, 2F 2D, 0F 4D

– deux configurations défavorables : 3F 1D, 1F 3D.

C'est à ce type de jeux que nous allons maintenant nous intéresser.

3. Expérimentation du générateur

3.1. Un seul cauri

S. Doumbia et J.-C. Pil se sont intéressés à ces jeux et ont cherché la probabilité d'obtenir F ou D avec un cauri ([3] p 63). Pour ce faire, ils ont lancé 1000 fois un même cauri, et ont réalisé la même expérience avec trois autres cauris. Ils ont obtenu les résultats suivants ([3] p. 63) :

Nº du cauri	1	2	3	4
Fréquence f_i de F (fente)	0,390	0,430	0,383	0,422

En faisant l'hypothèse qu'une probabilité d'apparition de F, soit p_i ($i = 1, 2, 3, 4$) est attachée à chacun des cauris, on peut chercher les intervalles de confiance à 95 % pour les p_i, en utilisant l'approximation normale et les bornes $f_i \pm 1{,}96\sqrt{\dfrac{f_i(1-f_i)}{n-1}}$

On trouve respectivement :

Cauri 1 : [0,36 ; 0,42]
Cauri 2 : [0,40 ; 0,46]
Cauri 3 : [0,35 ; 0,41]
Cauri 4 : [0,39 ; 0,45].

Les auteurs de l'étude concluent de leurs résultats : « *on peut estimer, dans des limites raisonnables, que la probabilité d'obtenir* [F] *est voisine de* 0,4 *ou* 2/5. *C'est précisément cette valeur que nous adopterons pour la suite de nos calculs*. » (ibid.). Autrement dit, ils modélisent leurs quatre cauris par un même modèle bernoullien, dans lequel la probabilité de succès est de 0,4. Ce n'est pas aberrant, dans la mesure où l'intervalle [0,40 ; 0,41] est inclus dans chacun des quatre intervalles de confiance ci-dessus.

3.2. Quatre cauris

Pour ce qui est du lancer simultané de 4 cauris, nous avons vu qu'il n'y a que deux issues : soit la configuration est favorable, soit elle est défavorable. La question qui

(3) Ainsi que pour la divination chez les Alladians (Côte d'Ivoire).
(4) Par exemple dans le *tiatia* du Mali et du Bénin, le *kô* de Côte d'Ivoire, le *nama* et le *piaf* du Mali, l'*orbido* du Sénégal ou encore l'*abbia* du Gabon et du Cameroun (cf. [3]).

se pose est alors : y a-t-il équiprobabilité de ces deux issues ? Et pour cela, il faut en évaluer la probabilité.

Commençons par étudier le cas particulier où les quatre cauris relèvent du même modèle, avec pour chacun la probabilité p d'obtenir F.

La probabilité d'obtenir une configuration défavorable (3F1D ou 1F3D) est alors :

$$4p^3(1-p)+4(1-p)^3 p$$

Et la probabilité d'obtenir une configuration favorable est par conséquent :

$$\mathrm{P}(p)=1-4p^3(1-p)-4(1-p)^3 p$$

On peut remarquer que cette formule reste inchangée lorsque l'on remplace p par $1-p$, c'est-à-dire qu'elle présente une symétrie par rapport à $p=\frac{1}{2}$. D'où l'idée de poser $p=\frac{1}{2}+h$, avec $h\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$. Il vient alors

$$\mathrm{P}(p)=1-4p^3(1-p)-4(1-p)^3 p \qquad (*)$$

[*P.-L. Hennequin m'a suggéré de généraliser cette formule au cas de 2n cauris* ($n\in\mathbb{N}^*$) *ayant la même probabilité p de donner « fente », l'issue favorable étant alors d'obtenir un nombre pair de « fentes » et un nombre pair de « dos ». Dans ce cas, la probabilité d'une issue favorable est :*

$$\mathrm{P}_n(p)=\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}p^{2i}(1-p)^{2(n-i)},$$

soit

$$\mathrm{P}_n(p)=\frac{1}{2}(1-p)^{2n}\left[\left(1+\frac{p}{1-p}\right)^{2n}+\left(1-\frac{p}{1-p}\right)^{2n}\right]$$

(*d'après la formule* $(1+x)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{2k}x^k$).

D'où $\mathrm{P}_n(p)=\frac{1}{2}\left[1+(1-2p)^{2n}\right]$, *ou enfin* $\mathrm{P}_n\left(\frac{1}{2}+h\right)=\mathrm{Q}(h)=\frac{1}{2}\left[1+(2h)^{2n}\right]$.]

Avec quatre pièces de monnaie « bien équilibrées » la formule (*) donne

$$\mathrm{P}(0{,}5) = \mathrm{Q}(0) = 0{,}5$$

(le jeu est équitable), et avec l'hypothèse faite précédemment sur les cauris ($p = 0{,}4$) on obtient

$$\mathrm{P}(0{,}4) = \mathrm{Q}(0{,}1) = 0{,}5008.$$

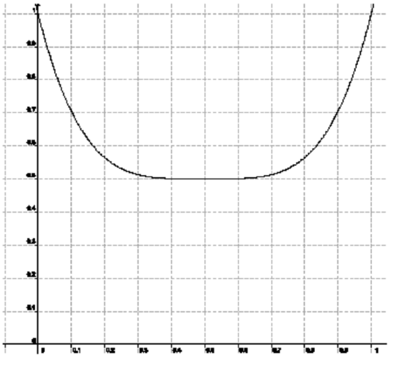
Ainsi donc, même avec des pièces mal équilibrées (mais de la même façon), on a un jeu presque équitable (50,08 % de chances de succès contre 49,92 % de chances d'échec). Ceci incite à aller voir de plus près la raison de cette stabilité.

3.3. Avons-nous là un « bon » générateur ?

La forme du polynôme Q nous fournit immédiatement la réponse : lorsque la probabilité p s'écarte de $\frac{1}{2}$ de la quantité h, la probabilité de succès s'écarte de $\frac{1}{2}$ de la quantité $8h^4$.

On peut aussi le dire autrement : la fonction $p \to \mathrm{P}(p)$ admet un point méplat pour $p = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire qu'on a $\mathrm{P}'\left(\frac{1}{2}\right) = \mathrm{P}''\left(\frac{1}{2}\right) = \mathrm{P}'''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Il en résulte que la fonction P varie très peu autour de ce point, ce que permet d'ailleurs de constater son graphique :



Cette particularité est bien sûr confirmée par un tableau de valeurs :

p	$\mathrm{P}(p)$
0,1	0,70480
0,15	0,62005
0,2	0,56480
0,25	0,53125
0,3	0,51280
0,35	0,50405
0,4	0,50080
0,45	0,50005
0,5	0,50000

Plus précisément, pour une valeur de p comprise entre 0,4 et 0,6, la probabilité d'obtenir une configuration favorable est comprise entre 0,5 et 0,5008. De même, pour une valeur de p comprise entre 0,35 et 0,65 (comme c'est le cas des quatre cauris « expérimentaux » … au seuil de 95 %), la probabilité d'une configuration favorable est comprise entre 0,5 et 0,504.

3.4. Cas général

Nous avons supposé que les quatre cauris avaient la même distribution de probabilité, mais on conçoit que ces résultats ne seront pas fondamentalement modifiés si on suppose les distributions différentes mais voisines.
Pour traiter le cas général, notons p_i la probabilité d'obtenir F pour le cauri nº i ($i = 1, 2, 3, 4$). La probabilité d'obtenir une configuration défavorable (3F1D ou 1F3D) est alors :

$$\sum_{i=1}^{4}(1-p_i)\prod_{j\neq i}p_j+\sum_{i=1}^{4}p_i\prod_{j\neq i}(1-p_j),$$

soit

$$\sum_{i=1}^{4}\left[(1-p_i)\prod_{j\neq i}p_j+p_i\prod_{j\neq i}(1-p_j)\right].$$

Par conséquent, la probabilité d'obtenir une configuration favorable est :

$$1-\left(\sum_{i=1}^{4}(1-p_i)\prod_{j\neq i}p_j+\sum_{i=1}^{4}p_i\prod_{j\neq i}(1-p_j)\right).$$

Prenons le cas de nos quatre cauris « expérimentaux », en leur affectant comme valeur de p_i la fréquence de succès obtenus à l'issue des 1000 lancers, c'est-à-dire $p_1 = 0{,}390$, $p_2 = 0{,}430$, $p_3 = 0{,}383$ et $p_4 = 0{,}422$. On trouve alors une probabilité de configuration favorable d'environ 0,50056.
En définitive, on voit qu'un matériel de jeu constitué de quatre objets semblables, qui peuvent s'arrêter de deux façons lorsqu'on les lance, produit les deux configurations indiquées plus haut avec des probabilités très voisines, et ceci même s'il n'y a pas tout à fait équiprobabilité des deux issues pour chaque objet. Ce matériel et cette règle du jeu nous fournissent donc une simulation du jeu de pile ou face dont la qualité n'a rien à envier à l'original (et qui est sans doute plus amusante à mettre en oeuvre)(5).

Bibliographie

[1] Alleau, R. (dir.) *Dictionnaire des jeux*. Éd. Henri Veyrier, Paris 1964.

[2] Grunfeld, F.D. (dir.) *Jeux du monde*. Éd. Lied, Genève 1976.

[3] Doumbia, S. & Pil, J.-C. *Les jeux de cauris*. Éd. Institut de Recherches Mathématiques d'Abidjan, 1992.

(5) Michel Henry m'a fait remarquer qu'on peut obtenir un générateur rigoureusement équiprobable avec *un seul cauri* qu'on lance deux fois : un joueur parie sur (F, D) et l'autre sur (D, F), et lorsqu'on obtient (F, F) ou (D, D) on recommence. C'est vrai mais c'est plus fatigant, donc moins ludique. En effet, le nombre de coups (de deux lancers du cauri) qu'il faudra jouer pour décider qui marque suit la loi géométrique de paramètre $2p(1 - p)$, donc d'espérance $1/(2p(1 - p))$, minorée par 2. Avec $p = 0{,}4$, par exemple, cette espérance vaut 2,08 environ. C'est-à-dire qu'on jouera en moyenne au moins deux coups, soit au moins quatre lancers d'un seul cauri au lieu d'un seul lancer des quatre cauris.