Exercices de-ci, de-là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par Mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

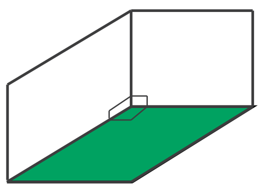
Jean Fromentin,
17 rue de la Roussille,
79000 NIORT

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial, une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 493-1 (Jean-Yves Le Cadre – Saint Avé)

Voici un trièdre trirectangle composé de trois miroirs.
Un rayon lumineux se réfléchit sur les trois faces successivement.
Que dire du dernier rayon réfléchi ?



Exercice 493-2 (Raphaël Sinteff – Nancy)

Soit la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $u_0 \in \mathbb{N}^*$, pour tout n entier naturel non nul, et $u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ u_n + 3 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$

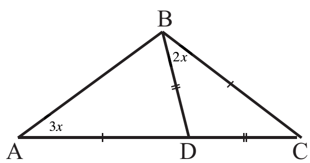
Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+3} = u_n$ ou $u_{n+2} = u_n$.

Exercice 493-3 (pioché de-ci, de-là…)

Dans le triangle ABC ci-contre, D est un point du segment [AC].

On a de plus : AD = BC ; BD = DC ; $\widehat{DBC} = 2x$ et $\widehat{DAC} = 3x$.

On demande la valeur de x.



Exercice 493-4 (Georges Lion – Wallis)

Une droite D étant donnée ainsi que deux points distincts A et B hors de D.

Déterminer les points de D en lesquels la fonction définie par $\mathrm{M} \mapsto \dfrac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}$ atteint ses extrema (lorsque ces atteintes ont lieu).

Solutions

Erratum. Dans la solution de l'exercice 488-2 parue dans le Bulletin nº 491, à 12 lignes du bas, il faut lire $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor y \rfloor$ ou E(x) et E(y) au lieu de $|x|$ et $|y|$. Merci à Georges Lion pour sa lecture attentive.

Exercice 491-1 (Daniel Reisz – Auxerre)

(exercice d'algèbre proposé à l'Université de Cambridge en 1877)

Trois Hollandais de mes amis, Henri, Nicolas et Corneille, récemment mariés, sont venus me faire une visite avec leurs femmes Gertrude, Catherine et Anna, mais j'ai oublié le nom de la femme de chacun en particulier. Ils m'ont dit qu'ils avaient été acheter des cochons au marché. Chacun d'eux en a acheté autant que le prix qu'il a payé pour un cochon. Henri a acheté 23 cochons de plus que Catherine ; Nicolas 11 de plus que Gertrude et chaque mari a dépensé 3 guinées *(1 guinée = 21 schillings)* de plus que son épouse. Pourriez-vous me dire d'après ces renseignements le prénom de l'épouse de chacun des hommes ?

Solution de Richard Beczkowski (Chalon sur Saône)

Pour chaque personnage de cette fiction économique : le prix d'un cochon est aussi le nombre de cochons achetés ; c'est donc un nombre entier positif ; le prix payé est un carré.
Pour chaque couple la différence de dépense entre le mari et la femme est une différence de carrés qui vaudrait 3 si l'unité monétaire de la transaction était la guinée et 63 si c'est le schilling.
$h^2 - f^2 = 3$ donnerait la seule solution $h = 2$ et $f = 1$ non compatible avec les autres données.
$h^2 - f^2 = 63$ ou $(h - f)\,(h + f) = 1 \times 3 \times 3 \times 7$ mène à trois cas :

$$\begin{cases} h+f=63 \\ h-f=1 \end{cases} ; \begin{cases} h+f=21 \\ h-f=3 \end{cases} ; \begin{cases} h+f=9 \\ h-f=7 \end{cases}.$$

D'où les valeurs possibles du couple $(h\,;f)$: (32 ; 31), (12 ; 9), (8 ; 1).
Henri, ayant acheté 23 cochons de plus que Catherine, en a acquis 32 et Catherine 9.
Nicolas, ayant acheté 11 cochons de plus que Gertrude, en a acquis 12 et Gertrude 1.
Corneille en a acquis 8 et Anna 31.
En conséquence les couples sont (Henri ; Anna), (Nicolas ; Catherine), (Corneille ; Gertrude).

Autres solutions : Robert Bourdon (Tourgeville), Daniel Reisz (Auxerre), Georges Lion (Wallis).

Nota.

Daniel Reisz indique qu'il s'agit d'un exercice d'algèbre proposé à l'Université de Cambridge en 1877, d'après un énoncé paru dans *Miscellany of mathematical problems* en 1743 ; qu'il a lui-même découvert dans l'ouvrage *Questions d'arithmétique* de B. Niewenglowski, Inspecteur Général, Vuibert, 1927, accompagné de la remarque suivante :

Catalan écrit à propos de cette question dont il a eu connaissance : « Voici un exemple, assez grossier, de l'art d'ensevelir le fond sous les accessoires. Si l'arithméticien qui en 1743 inventait cette question ridicule, si l'Université de Cambridge qui a cru la tirer d'un juste oubli, n'ont pas dit tout simplement : “ Résoudre en nombres entiers les équations : $x^2 - x'^2 = y^2 - y'^2 = z^2 - z^2 = 63$; $x - y' = 23$; $y - z' = 11$ *” ; c'est sans doute par respect pour la maxime: “ Plus on est obscur, plus on est savant ! ” Comme s'il n'y avait rien de préférable à la clarté et à la simplicité. »*(1)

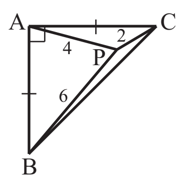
Exercice 491-2 (Jérôme Esquerré – Ramonville-Saint-Agne)

(d'après un exercice paru dans la rubrique « Affaire de logique » du Monde Magazine)

- Soient A et P deux points du plan tels que AP = 4.
  Construire un triangle ABC rectangle et isocèle en A tel que BP = 6 et CP = 2.
- À l'intérieur d'un triangle ABC rectangle et isocèle en A, P est le point tel que AP = 4, BP = 6 et CP = 2 (longueurs mesurées en cm).
  Combien mesure l'aire du triangle ABC en cm^2 ?

Solution de Jérôme Esquerré (Ramonville-Saint-Agne) pour la construction

Analyse :



Supposons qu'il existe deux points B et C tels que ABC soit rectangle isocèle en A, BP = 6 et CP = 2. B et C appartiennent alors respectivement au cercle $\mathcal{C}$ de centre P, de rayon 6 cm et au cercle γ de centre P de rayon 2 cm.

De plus, ABC étant rectangle isocèle en A, B est l'image de C soit par le quart de tour direct r_1 de centre A soit par le quart de tour indirect r_2 de centre A.

C $\in \gamma$, donc le point B = r_1(C) appartient au cercle $\gamma_1 = r_1(\gamma)$ de centre $P_1 = r_1(P)$ et de rayon 2 cm. De même, le point B = r_2(C) appartient au cercle $\gamma_2 = r_2(\gamma)$ de centre $P_2 = r_2(P)$ et de rayon 2 cm.

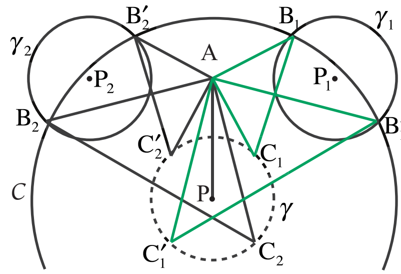
Ainsi, B $\in \mathcal{C} \cap \gamma_1$ ou B $\in \mathcal{C} \cap \gamma_2$.

Synthèse et construction :

Construisons d'abord les points P_1 et P_2 images respectives de P par le quart de tour

(1) Ce à quoi, environ 120 ans plus tard, Louis-Marie Bonneval rétorque : Pourquoi faire scolaire quand on peut faire ludique ?

direct r_1 de centre A et par le quart de tour indirect r_2 de centre A. On trace alors le cercle γ_1 de centre P_1 et de rayon 2 cm, le cercle γ_2 de centre P_2 et de rayon 2 cm, puis le cercle C de centre P et de rayon 6 cm. D'après le théorème de Pythagore appliqué aux triangles APP_1 et APP_2 rectangles isocèles en A avec AP = 4, on obtient :



$$PP_1 = PP_2 = 4\sqrt{2}.$$

Ainsi, $4 < PP_1 < 8$, donc C et γ_1 sont sécants en deux points B_1 et B'_1.

De même, $4 < PP_2 < 8$, donc C et γ_1 sont sécants en deux points B_2 et B'_2. On construit alors $C_1 = r_2(B_1)$, $C'_1 = r_2(B'_1)$, $C_2 = r_1(B_2)$, $C'_2 = r_1(B'_1)$.

Par définition de r_2, le triangle AB_1C_1 est rectangle et isocèle en A avec $PB_1 = 6$ (car $B_1 \in C$).
De plus, $[PC_1]$ est l'image de $[P_1B_1]$ par r_2 donc $PC_1 = P_1B1$. Or $B_1 \in \gamma_1$ donc $P_1B_1 = 2$. Dès lors, $PC_1 = 2$.
Le triangle AB_1C_1 est donc une solution au problème posé.

On obtient de la même façon que les triangles $AB'_1C'_1$, AB_2C_2 et $AB'_2C'_2$ sont aussi des solutions du problème.
Le problème posé admet exactement quatre solutions.

Remarque : Si l'on ne tient pas compte de la symétrie par rapport à (AP), ce problème admet deux triangles solutions non isométriques : par exemple AB_1C_1 et $AB'_1C'_1$.

En démontrant que P, P_1, C_1 et C'_1 appartiennent à la médiatrice de $[B_1B'_1]$, on peut prouver que P est extérieur au triangle AB_1C_1 et que P est intérieur au triangle $AB'_1C'_1$.
Il est aussi possible de déterminer les dimensions des deux triangles non isométriques :

lorsque P est extérieur à ABC, on a $BC = 2\sqrt{10 - 4\sqrt{2}}$ et $AB = 2\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$,

lorsque P est intérieur à ABC, $BC = 2\sqrt{10 + 4\sqrt{2}}$ et $AB = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$.

Solution de Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques) pour l'aire

Si le triangle ABC est direct, le point C est un point d'intersection du cercle, de centre P, de rayon 2, et du cercle image du cercle, de centre P, de rayon 6, par la rotation de centre A et d'angle $\pi/2$.
Deux triangles ABC sont possibles : pour l'un, le point P est intérieur au triangle et pour l'autre, il est extérieur.
Pour le calcul du côté a = AB = AC, on peut utiliser des méthodes élémentaires ou se servir de la relation entre les distances mutuelles de quatre points dans le plan,

obtenue en écrivant la nullité du déterminant de Cayley-Menger (voir par exemple le beau livre de géométrie de Marcel Berger) :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \mathrm{PA}^2 & \mathrm{PB}^2 & \mathrm{PC}^2 \\ 1 & \mathrm{AP}^2 & 0 & \mathrm{AB}^2 & \mathrm{AC}^2 \\ 1 & \mathrm{BP}^2 & \mathrm{BA}^2 & 0 & \mathrm{BC}^2 \\ 0 & \mathrm{CP}^2 & \mathrm{CA}^2 & \mathrm{CB}^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 16 & 36 & 4 \\ 1 & 16 & 0 & a^2 & a^2 \\ 1 & 36 & a^2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & 4 & a^2 & 2a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -4a^2\left(a^4 - 40a^2 + 272\right).$$

On trouve : $a^2 = 20 \pm 8\sqrt{2}$.

La plus grande des solutions correspond au triangle qui admet P à l'intérieur. Son aire est égale à $10 + 4\sqrt{2}$.

Remarque sur le déterminant de Cayley-Menger.

Le déterminant de Cayley-Menger permet d'obtenir le volume d'un tétraèdre en fonction des longueurs des arêtes.

Si d_{ij} désigne la distance entre deux sommets du tétraèdre on a :

$$288\mathrm{V}^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \mathrm{d}_{12}^2 & \mathrm{d}_{13}^2 & \mathrm{d}_{14}^2 \\ 1 & \mathrm{d}_{21}^2 & 0 & \mathrm{d}_{23}^2 & \mathrm{d}_{24}^2 \\ 1 & \mathrm{d}_{31}^2 & \mathrm{d}_{32}^2 & 0 & \mathrm{d}_{34}^2 \\ 0 & \mathrm{d}_{41}^2 & \mathrm{d}_{42}^2 & \mathrm{d}_{43}^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est nul si et seulement si les points sont coplanaires.

De façon plus générale, en dimension n, ce déterminant d'ordre $n + 2$ fournit le n-volume d'un $(n + 1)$-simplexe.

Attention : il faut multiplier par un coefficient qui dépend de n, puis prendre la racine carrée.

Par exemple si $n = 2$ il donne l'aire d'un triangle en fonction des longueurs des côtés, c'est-à-dire la formule de Héron.

$$-16\mathrm{S}^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \mathrm{d}_{12}^2 & \mathrm{d}_{13}^2 \\ 1 & \mathrm{d}_{21}^2 & 0 & \mathrm{d}_{23}^2 \\ 1 & \mathrm{d}_{31}^2 & \mathrm{d}_{32}^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^1 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

avec les notations habituelles AB = c, BC = a et CA = b.

Entre autres traces sur la toile, il en est fait mention dans l'article de Thierry Lambre sur les polygones flexibles (communication lors des journées nationales de Clermont Ferrand) disponible sur http://www.apmep.asso.fr/Thierry-Lambre ; qui lui-même, fait référence au livre de Marcel Berger cité par Pierre Renfer.

Autres solutions : Robert Bourdon (Tourgeville), Michel Sarrouy (Mende), Alain Corre (Moulins), Georges Lion (Wallis), Patrice Debart (Marseille).

Nota.

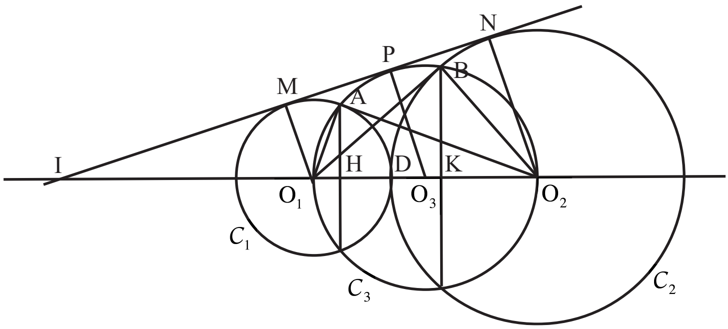
La solution complète de Jérôme Esquerré montre plusieurs façons d'obtenir l'aire du triangle, qui était la question parue dans *Affaire de logique*. Elle est disponible en complément en ligne à ce BV nº 493 sur le site national de l'association.

Exercice 491-3 (Jacques Borowczyk – Tours)

(configuration d'Armand Borgnet (1842))

Soient deux cercles (C_1) et (C_2) dont les centres O_1 et O_2 sont les extrémités d'un diamètre du cercle (C_3) de centre O_3 et dont la somme des rayons est égale au diamètre du cercle (C_3). Alors, toute tangente commune à deux de ces trois cercles ne passant pas par le point de contact des cercles (C_1) et (C_2) est tangente au troisième cercle et les arcs de cercle des cercles (C_1) et (C_2) interceptés par le cercle (C_3) ont des flèches de même longueur.

Solution de Robert Bourdon (Tourgeville)



Tangentes.

Soient r_1, r_2 et r_3 les rayons respectifs des cercles (C_1), (C_2) et (C_3), (AH) et (BK) les sécantes aux cercles, (MN) la tangente commune aux cercles (C_1) et (C_2), qui coupe la droite des centres en I.

Dans le triangle INO_2, (O_1M) est parallèle à (O_2N). Menons (O_3P) parallèle à (O_1M) et (O_2N), donc perpendiculaire à (MN).

$$O_3P = \frac{O_1M + O_2N}{2} = \frac{r_1 + r_2}{2} = r_3.$$

Donc P est sur (C_3) et (MN) est ainsi tangente à (C_3) en P.

Si on prend (MP) tangente à (C_1) et (C_3), le segment $[O_2N]$ perpendiculaire à (MP) sera tel que

$$\frac{O_2N + r_1}{2} = r_3.$$

Donc $O_2N = r_3$ et MP sera tangente à (C_1).

Flèches.
O_1AO_2 est un triangle rectangle donc $O_1A^2 = O_1H \times O_1O_2$;

ce qui s'écrit aussi $O_3P = \dfrac{r_1^2}{2r_3}$, d'où $HD = r_1 - \dfrac{r_1^2}{2r_3} = \dfrac{r_1(2r_3 - r_1)}{2r_3}$.

Or $2r_3 - r_1 = r_2$, donc $HD = \dfrac{r_1 r_2}{2r_3}$.

En procédant ensuite dans O_1BO_2 avec $O_1B_2 = O_2K \times O_2O_1$, on obtient de même $KD = \dfrac{r_1 r_2}{2r_3}$. Les flèches HD et KD sont bien égales.

Autres solutions : Maurice Bauval (Versailles), Jean-Claude Carréga (Lyon), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Michel Sarrouy (Mende), Alain Corre (Moulins), Richard Beczkowski (Chalon-sur-Saône), Georges Lion (Wallis).

Remarque.
Pour le calcul des flèches, Michel Sarrouy a étudié le cas général de la longueur de la flèche de l'arc d'un cercle intercepté par un autre cercle ; les autres solutions utilisaient les notions d'homothétie, puissance d'un point par rapport à un cercle, axe radical. J'ai privilégié la solution qui abordait les connaissances minimales.

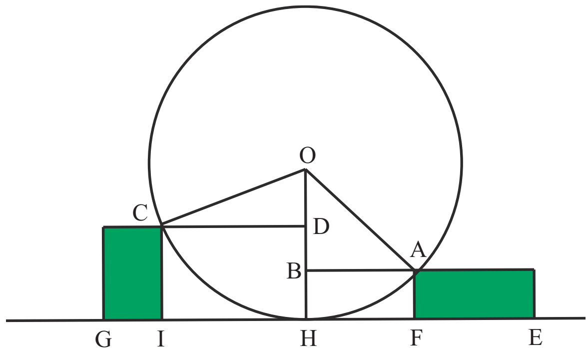
Nota.
Armand Borgnet est un mathématicien français du 19ème siècle. Professeur de mathématiques (agrégation en 1830), il a publié des ouvrages de géométrie dont *Essai de géométrie analytique de la sphère* (1847), *De la mesure des aires sphériques* (1860).
L'exercice 491-3 est extrait de la *Note sur quelques théorèmes de géométrie* parue dans les *Annales de la Société d'Agriculture d'Indre et Loire*, 1842, p.134-137, sous les deux formes suivantes :
Si des deux extrémités du diamètre d'un cercle, comme centre, on décrit deux circonférences avec des rayons dont la somme soit égale à ce diamètre, les arcs des circonférences, interceptées par la première, auront des flèches égales.
Deux circonférences étant tangentes extérieurement, si l'on vient à décrire une troisième circonférence sur la distance des centres des deux premières, comme diamètre, les trois circonférences ainsi tracées auront une tangente commune, et le point de contact moyen sera également éloigné des deux points de contact extrêmes.

Exercice 491-4 (Georges Lion – Wallis)

(question du concours australien de mathématiques 2010)

Deux pavés $10 \times 18 \times L$ sont disposés des deux côtés d'un cylindre de longueur L pour l'empêcher de rouler. L'un des pavés a une face $10 \times L$ sur le sol tandis que l'autre a une face $18 \times L$ sur le sol. L'un des pavés dépasse le cylindre de 4 unités de plus que l'autre.
Calculer le rayon R du cylindre sachant qu'il s'agit d'un entier strictement supérieur à 18.

Solution de Jean-Claude Carrega (Lyon)



Nous faisons la figure dans un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre. La trace du cylindre est un cercle de centre O.
Les traces des pavés sont des rectangles.
Pour l'un, les longueurs des côtés sont EF = 18 et AF = 10 ; pour l'autre GI = 10 et CI = 18.
Pour calculer la longueur HI = CD, on considère le triangle rectangle OCD.
On a

$$OC = R,$$
$$OD = OH - DH = OH - CI = R - 18.$$

D'où

$$CD^2 = OC^2 - OD^2 = R^2 - (R - 18)^2 = 36\,R - 324.$$

Ainsi

$$HI = CD = \sqrt{36R - 324}$$

et

$$HG = HI + GI = \sqrt{36R - 324} + 10\,.$$

On calcule HF de façon analogue,

$$HF = BA$$

et dans le triangle rectangle OBA, on a

$$BA^2 = OA^2 - OB^2 = R^2 - (R - 10)^2 = 20\,R - 100.$$

Ainsi

$$HF = BA = \sqrt{20R - 100}$$

et

$$HE = HF + FE = \sqrt{20R - 100} + 18.$$

On va exprimer que les longueurs HG et HE diffèrent de 4 unités. Nous distinguons deux cas.

1) Supposons HE < HG. On a alors HG = HE + 4, c'est-à-dire :

$$\sqrt{36R - 324} + 10 = \sqrt{20R - 100} + 18 + 4\,,$$

soit

$$\sqrt{36R-324}=\sqrt{20R-100}+12.$$

En élevant au carré, on obtient

$$36R-324=20R-100+144+24\sqrt{20R-100},$$

soit

$$16R-368=24\sqrt{20R-100}.$$

On simplifie par 8, d'où

$$2R-46=3\sqrt{20R-100}.$$

En élevant au carré, on obtient $4\,R^2-184\,R+2\,116=9\,(20\,R-100)$, soit $4\,R^2-364\,R+3\,016=0$, soit $R^2-91\,R+754=0$.
Le discriminant est $\Delta=91^2-3\,016=5\,265$ et

$$R=\frac{91\pm\sqrt{5\,265}}{2}.$$

Puisque R est supposé entier, $\sqrt{5\,265}$ doit être entier. Ce n'est pas le cas, donc on n'est pas sous la bonne hypothèse.

2) Supposons HG < HE. On a alors HE = HG + 4, c'est-à-dire :

$$\sqrt{20R-100}+18=\sqrt{36R-324}+10+4.,$$

soit

$$\sqrt{36R-324}=\sqrt{20R-100}+4.$$

En élevant au carré, on obtient

$$36R-324=20R-100+16+8\sqrt{20R-100},$$

soit

$$16R-240=8\sqrt{20R-100}.$$

On simplifie par 8, d'où

$$2R-30=\sqrt{20R-100}.$$

En élevant au carré, on obtient $4\,R^2-120\,R+900=20\,R-100$, soit $4\,R^2-140\,R+1000=0$, soit $R^2-35\,R+250=0$. Le discriminant est $\Delta=35^2-1000$, $\Delta=225$ et

$$R=\frac{35\pm15}{2}.$$

Soit $R=25$ ou $R=10$.
Puisque R est supposé supérieur à 18, on obtient donc R = 25.

Autres solutions : Robert Bourdon (Tourgeville), Michel Sarrouy (Mende), Guy LeProvost (Trelivan), Jean Gounon (Chardonnay), Georges Lion (Wallis), Richard Beczkowski (Chalon sur Saône).

Nota.
La solution de Michel Sarrouy et son fichier dynamique Geogébra vous sont proposés en complément en ligne à ce BV n° 493 sur le site national de l'association.