Une démonstration surprenante et élégante…

Michel Fréchet

On trouve dans certains livres de terminale S cet exercice. Il se propose de démontrer le fameux théorème de Desargues[(1)]

> Trois droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ concourent en un point O.
> Deux triangles ABC et A′B′C′ ont leurs sommets sur chacune des trois droites (A et A′ sur $\mathcal{D}_1$, B et B′ sur $\mathcal{D}_2$ et C et C′ sur $\mathcal{D}_3$) On suppose que les côtés homologues[a] sont sécants en I, J et K. Alors, affirme le *Théorème de* DESARGUES, I, J et K sont alignés.
> Le problème qui suit propose une démonstration de ce théorème.
> Question préliminaire : Soit O un point fixé du plan. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :
> • les points P, Q et R sont alignés
> • il existe trois réels p, q et r non tous nuls tels que :
>
> $$\begin{cases} p+q+r=0 \\ p\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+q\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+r\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{0} \end{cases}$$
>
> 1. Justifier l'existence de trois réels α, β et γ tels que :
>
> $$\alpha\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-\alpha)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\beta\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-\beta)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\gamma\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(1-\gamma)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=\vec{0}$$
>
> et montrer que les nombres α, β et γ sont deux à deux distincts.
>
> 2. Établir :
>
>   • que I est le barycentre de (B, β) et (C, $-\gamma$),
>   • que J est le barycentre de (C, γ) et (A, $-\alpha$),
>   • que K est le barycentre de (A, α) et (B, $-\beta$).
>
> 3. En déduire que les points I, J et K sont alignés.
>
> *a*. Côtés homologues : AB et A′B′ sont les côtés homologues, de même que BC et B′C′, ou AC et A′C′.

Nous laisserons au lecteur de ce Bulletin Vert le soin de faire cet exercice.

Cette propriété apparaît, avec une présentation plus compliquée et générale, dans le traité publié par A. BOSSE en 1648, intitulé « *Manière universelle de* M. DESARGUES, *pour pratiquer la perspective…* ».

Quel rapport y a-t-il entre cet exercice de géométrie plane et analytique et un traité de perspective ?

(1) DESARGUES : mathématicien lyonnais, inventeur de la géométrie projective (1591-1661).

Voici une figure représentant la situation :

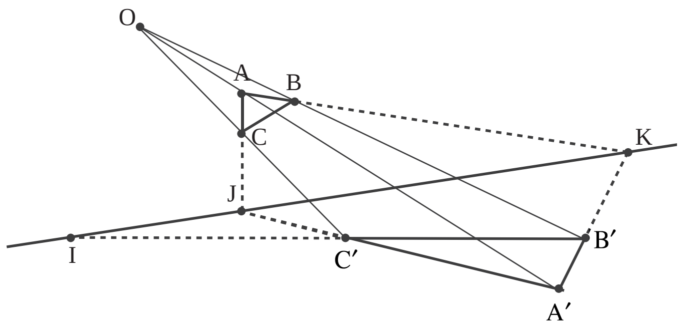

Fig. 1

Maintenant, imaginons que nous sommes dans l'espace, que le triangle ABC soit la représentation en perspective du triangle A′B′C′, l'œil du peintre étant en O.

La propriété devient alors évidente : le point I appartenant à la droite (B′C′) et à la ligne de terre se trouve donc dans le plan du tableau ; étant sur la droite (B′C′), sa représentation sur le tableau (c'est à dire lui-même) sera sur la droite (BC), image de (B′C′). On montre de la même façon que J et K se trouvent à l'intersection du plan ABC et du plan A′B′C′. Ils sont donc alignés.

Ainsi la propriété est vérifiée dans l'espace ; c'est de cette façon que DESARGUES la démontre. Il utilise ensuite la propriété dite de MÉNÉLAÜS pour le prouver dans le cas où tous les points sont dans le même plan. Néanmoins, il note que la figure formée par deux triangles perspectifs (c'est le nom donné à chaque couple de triangles tels ABC et A′B′C′) de l'espace se transforme, par projection cylindrique (projection suivant une direction, sur un plan, l'œil se trouve alors à l'infini), en deux triangles perspectifs d'un même plan(2).

C'est ainsi que nous terminerons : la figure 1 représente la projection cylindrique de la situation exprimée par la figure 2 sur le plan de la feuille. La projection conservant l'alignement, les points I, J et K étant alignés dans l'espace, leurs projetés le seront dans le plan.

Il reste à étudier tous les cas particuliers où certaines droites, voire toutes, ne se coupent pas (cas éludés par l'énoncé de l'exercice). Pour cela, il suffit de considérer, comme DESARGUES qui fut le premier à introduire cette notion, que le point d'intersection de deux droites parallèles se trouve à une distance infinie (point à l'infini).

Que l'on donne ce type d'exercice aux élèves afin de les entraîner au calcul barycentrique est compréhensible, mais je pense qu'ils doivent connaître la démonstration originelle, d'autant plus que celle-ci me parait beaucoup plus convaincante, car visuelle.

(2) Voir L'œuvre mathématique de G. DESARGUES, VRIN. Postface René TATON.

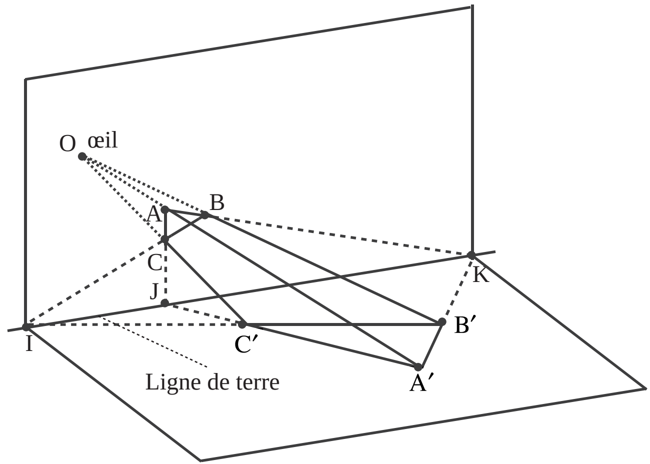

Fig. 2