La géométrie projective : point de vue et perspective

Louis-Marie Bonneval et Jean-Claude Thiénard(*)

Jusque dans les années 1970, les formations mathématiques donnaient une place importante à la géométrie projective, dont les rudiments étaient même enseignés au lycée. Pour les gens de notre génération, lycéens dans les années 1960, les termes *division harmonique*, *points conjugués*, *transformation par polaires réciproques*, *homographie*, *points cycliques*, … éveillent une certaine nostalgie, parfois assortie d'un questionnement : d'où venaient ces notions, et où menaient-elles ?

Cette géométrie semble un peu oubliée aujourd'hui, et pour nos jeunes collègues les expressions ci-dessus n'évoquent sans doute pas grand-chose. S'ils cherchent à se documenter sur la question, ils risquent de se heurter à la définition suivante :

Étant donné un espace vectoriel E *de dimension* 3, *on appelle plan projectif associé à* E, *noté* P(E), *l'ensemble des droites vectorielles de* E. *Un point de* P(E) *est une droite vectorielle de* E *; une droite de* P(E) *est l'ensemble des droites vectorielles d'un même plan vectoriel de* E.

On avouera qu'une telle définition, posée sans commentaire, a de quoi laisser perplexe ! Cela peut sembler incroyable, mais des générations d'étudiants, voire de lycéens [9], l'ont subie – parfois dans le cas plus général d'une dimension quelconque – sans aucune introduction préalable ! On observe là la dramatique perte de sens que suscite une certaine façon d'enseigner les mathématiques !

En effet, pour comprendre la définition ci-dessus, il est indispensable d'expliquer le cheminement historique qui y a conduit. C'est ce que nous voudrions faire ici, d'une façon rapide et donc inévitablement simplifiée.

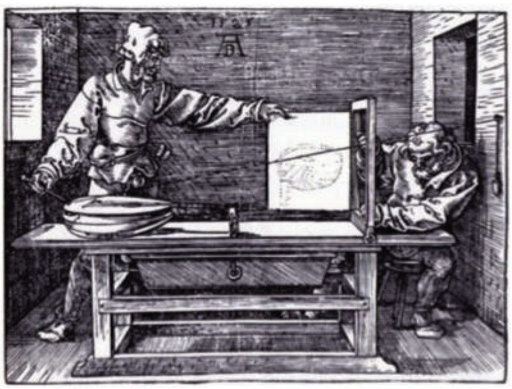
Au commencement était la perspective

En 1435 **Alberti** publie son célèbre traité *De pictura* où il expose les principes de la perspective. Cet ouvrage fournit aux peintres de la Renaissance des techniques pour rendre le relief dans leurs tableaux.

Ces procédés seront illustrés un siècle plus tard par Dürer :

(*) IREM de Poitiers (Atelier de Culture Scientifique),
lm.bonneval@gmail.fr, jean-claude.thienard@laposte.net

Artiste dessinant une femme allongée (1525)



Le dessinateur de luth (1535)

Ces dessins parlent d'eux-mêmes : de chaque point de l'*objet* à représenter, part vers l'œil du peintre (le *point de vue*) un rayon lumineux (matérialisé par un fil dans le deuxième dessin). Ce rayon coupe le *plan du tableau* en un point qui est l'*image*(1) du point initial(2).

La modélisation mathématique de la perspective

Deux siècles après Alberti, l'architecte **Desargues** [3] « voit » que derrière ces procédés picturaux qui donnent pour image d'un cercle une conique, il y a conservation de certaines propriétés : alignement, involution de points, … et il en déduit une méthode de découverte et de démonstration par transport de propriétés(3). Il développe cela dans son *Brouillon project* (1639), traité extrêmement novateur par rapport aux canons d'Euclide. Il y introduit les démonstrations « par le relief », qui consistent à considérer une configuration du plan comme la vue en perspective d'une autre configuration(4) ; il transgresse ainsi une règle absolue depuis Euclide, selon

(1) Les mots *objet* et *image* ont ici leur sens commun, qui sera généralisé par les mathématiciens à n'importe quelle transformation, et même n'importe quelle fonction.

(2) Le quadrillage sert à repérer les points pour les reporter sur le dessin final.

(3) En ce sens Desargues peut être considéré comme l'inventeur de la méthode des transformations [13, article 1].

(4) Un exemple célèbre est le théorème qui porte son nom (voir ci-après l'article de Michel Fréchet).

laquelle une propriété de géométrie plane doit être démontrée dans le seul cadre de la géométrie plane.

D'autres après lui développeront considérablement ces idées : au XVII^{e} siècle Pascal[5], De La Hire, Newton, Le Poivre ; au XVIII^{e} siècle MacLaurin, Lambert ; au XIX^{e} siècle Monge, Carnot, Poncelet, Chasles, Gergonne, Steiner, Von Staudt, … Le rôle de **Poncelet** (*Traité des propriétés projectives des figures*, 1822) et de **Chasles** (*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, 1837 ; *Traité de géométrie supérieure*, 1852 ; *Traité des sections coniques*, 1865) sera capital dans la mise en forme de la théorie[6].

Énonçons en langage géométrique quelques propriétés fondamentales de la perspective, dite aussi *projection centrale* ou *projection conique*, en commençant par sa définition :

1) Étant donnés un plan P et un point O hors de P, la projection de centre O sur le plan P associe à tout point M de l'espace (sauf ceux du plan P_O parallèle à P passant par O), le point M′ intersection de la droite (OM) avec P.

2) Les points situés sur une droite passant par O (et non incluse dans P_O) ont pour image le même point de P.

3) Une droite ne passant pas par O (et non incluse dans P_O) a pour image une droite. En effet une telle droite définit avec O un plan qui coupe P selon une droite.

4) L'image d'un cercle est une conique. En effet les droites issues de O et s'appuyant sur le cercle constituent un cône, dont l'intersection avec P est une conique.

5) Deux droites parallèles entre elles, mais non parallèles à P, ont pour images deux droites concourantes. En effet les plans définis par O et chacune de ces droites se coupent selon la droite de même direction passant par O, qui coupe le plan du tableau en un point (le *point de fuite*).

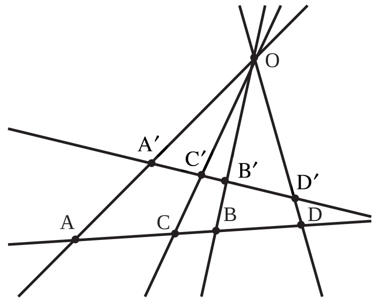
6) Deux droites parallèles entre elles et parallèles à P ont pour images deux droites parallèles. En effet les plans définis par O et chacune de ces droites coupent le plan du tableau selon deux droites parallèles.

(5) Pascal connaissait bien Desargues, qui était un ami de son père. Il le cite dans son *Essai pour les coniques* de 1639 puis dans son *Traité sur les coniques* (perdu, mais retranscrit partiellement par Leibniz).
(6) Le *Brouillon Project*, perdu au XVIII^{e} siècle, n'a été retrouvé qu'au début du XIX^{e} siècle grâce aux recherches de Chasles, mais les mathématiciens en avaient connaissance, à travers Pascal notamment.

7) Si quatre points alignés distincts A, B, C, D (non alignés avec O) ont pour images respectives A′, B′, C′, D, alors

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} / \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}} / \frac{\overline{D'A'}}{\overline{D'B'}}.$$

Pour le démontrer on peut mener par B et B′ les parallèles à (OA) et utiliser plusieurs fois le théorème de Thalès [10].



Le nombre $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} / \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ s'appelle le *birapport* des quatre points alignés distincts A, B, C, D.

L'harmonicité

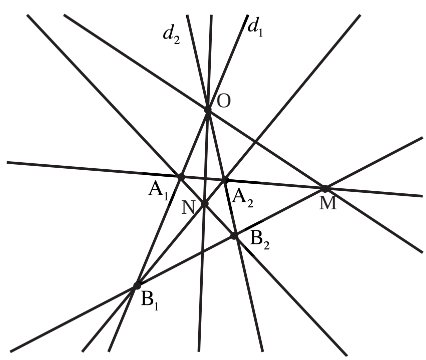
Lorsque le birapport vaut −1, les paires {A,B} et {C,D} jouent des rôles symétriques : on dit que les quatre points sont en *division harmonique*(7), ou encore que C et D sont *conjugués harmoniques* par rapport à A et B, ou que A et B sont conjugués harmoniques par rapport à C et D.

Alors, pour tout point O extérieur à la droite (ABCD), les droites (OA), (OB), (OC) (OD) déterminent sur toute sécante une division harmonique (d'après la propriété 7). On dit qu'elles constituent un *faisceau harmonique*. On peut démontrer qu'alors la parallèle à (OA) passant par B détermine avec (OC) et (OD) deux points symétriques par rapport à B (propriété 8).

Étant donnée une paire de droites d_1 et d_2 sécantes en O, et un point M hors de ces deux droites, on appelle *polaire* de M par rapport à d_1 et d_2 la droite d telle que le faisceau $(d_1,d_2,(OM),d)$ soit harmonique. On peut la construire de la façon suivante :

Une droite issue de M coupe d_1 et d_2 en A_1 et A_2. Une autre droite issue de M coupe d_1 et d_2 en B_1 et B_2. Les droites (A_1B_2) et (B_1A_2) se coupent en N. La polaire de M est la droite (ON).

M est le *pôle* de (ON). Symétriquement, la polaire de N est la droite (OM), N est le pôle de (OM).



La configuration ci-dessus (quatre points A_1, A_2, B_1, B_2 et les six droites qui les relient deux à deux) s'appelle un *quadrilatère complet*. On y trouve plusieurs divisions harmoniques. Elle fournit un moyen pour construire, à la règle seule, le conjugué harmonique d'un point par rapport à deux autres.

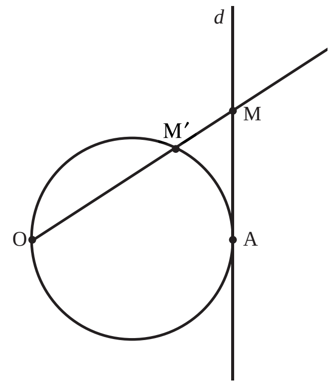
(7) Si la droite est munie d'un repère d'origine A, l'abscisse de B est la moyenne harmonique de celles de C et D.

Les points à l'infini

La propriété 5 ci-dessus conduit assez naturellement Desargues à un artifice de langage qui s'avèrera capital.

Il convient de dire que *deux droites parallèles se coupent en un point à l'infini*. Plus précisément, toutes les droites ayant une même direction ont en commun le même « point à l'infini ». Ce point à l'infini a pour image dans le plan du tableau le *point de fuite*, intersection avec le plan du tableau de la droite passant par O ayant cette direction.

Notons qu'il n'y a pas d'ordre sur une droite ainsi complétée par un seul point à l'infini, qui prend alors le nom de *droite projective*. Elle est en bijection avec un cercle, comme le montre le dessin ci-contre(8). On peut la considérer comme un cercle de rayon infini.



Pour deux points distincts A et B, le conjugué harmonique de leur milieu est le point à l'infini de la droite (AB) (d'après la propriété 8). Par suite l'image en perspective du milieu de deux points est le conjugué du point de fuite. Cela fournit au peintre une clé pour représenter des points régulièrement espacés, donc des dallages, des frises, etc.

Pour les directions de droites d'un même plan Π non parallèle à P, les points de fuite correspondants constituent une droite(9), intersection avec P du plan passant par O parallèle à Π. Cela conduit à dire que les points à l'infini des droites de Π constituent une droite, dite *droite de l'infini* de Π. On appelle *plan projectif* le plan Π complété par sa droite de l'infini(10).

Dans l'espace, deux plans parallèles ont la même droite de l'infini. Le *plan de l'infini* est la réunion de toutes les droites de l'infini.

Ce langage permet de considérer les droites parallèles comme un cas particulier de droites sécantes. Ainsi le cylindre est un cône dont le sommet est à l'infini, la

(8) Par l'inversion de pôle O et de puissance OA^2, la droite a pour transformé le cercle privé de O. En complétant la droite par son point à l'infini, on obtient comme image le cercle complet.
(9) La ligne d'horizon, si (Π) est horizontal.
(10) CABRI-Géomètre II permet d'« envoyer à l'infini » un point en le redéfinissant comme point commun à deux droites parallèles, la construction restant en général valable. Si une droite passe par deux points A et B et si on envoie ces deux points à l'infini, la droite continue à exister comme «droite de l'infini ». Avec cette particularité, on peut fournir des constructions montrant le caractère projectif de la propriété 7 et des suivantes [4].

projection cylindrique une projection conique où le centre de projection est à l'infini[11].

Cela permet aussi de traiter ensemble tous les types de coniques (y compris les coniques dégénérées) : les ellipses sont les coniques qui n'ont pas de point à l'infini ; les paraboles (et les paires de droites parallèles) celles qui ont un point à l'infini (où la tangente est la droite de l'infini) ; les hyperboles (et les paires de droites sécantes) celles qui ont deux points à l'infini (où les tangentes sont les asymptotes).

L'aspect analytique

Nous passerons sur les développements analytiques[12] (repères projectifs, coordonnées homogènes, équations ponctuelles ou tangentielles, …), l'apport des nombres complexes (points cycliques, …), la généralisation à un espace de dimension 3 ou davantage, la topologie qu'on peut définir dans ce cadre.

Tout cela engendrera au XX^{e} siècle la géométrie algébrique, branche très active des mathématiques actuelles.

Les propriétés projectives

Appelons *propriétés projectives* les invariants par projection centrale : alignement, concours, birapport, harmonicité, …

Le *contact* est une propriété projective, ce qui a été énoncé par Desargues mais demande quelques développements analytiques pour être pleinement démontré.

Le *degré d'une courbe algébrique* est une propriété projective. En effet c'est le nombre de points d'intersection d'une telle courbe avec une droite (points réels ou imaginaires, distincts ou confondus, à distance finie ou à l'infini). Ainsi par projection centrale une conique est transformée en une conique.

Il en résulte notamment que toute propriété *projective* du cercle engendre automatiquement la même propriété pour toute conique. Un exemple célèbre est le théorème de Pascal : *Si un hexagone a ses sommets sur une conique, les intersections des côtés opposés sont alignées*. Pascal démontre la propriété pour un cercle (à l'aide du théorème de Ménélaüs), et la généralise à une conique quelconque en remarquant qu'il s'agit d'une propriété projective.

On notera que cet énoncé unique englobe divers cas de figure (nature de la conique[13], possibilité que certains côtés de l'hexagone soient parallèles, ou que certains sommets soient à l'infini) qui n'ont pas besoin d'être traités séparément.

---

(11) Ainsi, la perspective cavalière est une projection dont le centre est à l'infini. Elle représente donc d'autant mieux l'objet que le point de vue en est plus éloigné.
(12) dus notamment à Möbius et Plücker au XIX^{e} siècle.
(13) Si la conique est dégénérée en une paire de droites, on obtient le théorème de Pappus.

La dualité

La notion de polaire d'un point par rapport à une paire de droites peut se généraliser en *polaire d'un point par rapport à une conique*. On appelle *transformation par polaires réciproques* cette correspondance entre un point et une droite, qui joue dans les deux sens : si M a pour polaire d, autrement dit si d a pour pôle M, alors tout point de d a une polaire qui passe par M, et toute droite qui passe par M a son pôle sur d.

Quand un point décrit une courbe algébrique C de degré n, sa polaire enveloppe une courbe C′ de degré $n\,(n-1)$; donc si C est une conique, C′ est aussi une conique.

De toute propriété projective, on peut ainsi déduire une autre, en remplaçant respectivement le mot « point » par le mot « droite », les expressions, « points sur une droite », « points sur une conique » par « droites passant par un point », « droites tangentes à une conique », et réciproquement.

Citons une illustration célèbre de ce « principe de dualité » : le dual du théorème de Pascal est le théorème de Brianchon : *Si un hexagone a ses côtés tangents à une conique, alors ses diagonales sont concourantes*.

L'axiomatisation

Dans tout ce qui précède, les raisonnements sont faits dans le cadre de la géométrie d'Euclide, même si un nouveau langage et de nouvelles méthodes ont été introduits(14).

Or, au milieu du XIXe siècle, les travaux de Gauss, Lobatchevski, Bolyai, Riemann ont montré qu'on pouvait développer d'autres géométries en changeant les axiomes d'Euclide, plus précisément en modifiant le cinquième.

On sait la révolution que cela a entraînée dans la conception même des mathématiques(15) : le statut de l'axiome a changé, passant de « vérité de bon sens » à « base d'une théorie » ; désormais les mathématiques ne prétendent plus décrire la réalité(16), elles élaborent des théories que peuvent utiliser les sciences expérimentales pour cela ; alors que les sciences expérimentales sont validées *in fine* par l'expérience, les mathématiques le sont par leur seule cohérence logique.

Cela suggère un nouveau regard sur les concepts et méthodes dont nous parlons : peut-on construire une axiomatique qui les fonde logiquement ? La réponse est oui [6], *à condition de ne plus particulariser les éléments à l'infini*. C'est à partir de ce moment (à la fin du XIXe siècle, après les travaux de Klein évoqués ci-après) qu'on peut parler de la *géométrie projective* comme d'une théorie ayant sa propre cohérence. Et elle apparaît comme une **géométrie non-euclidienne**, plus

(14) Si Desargues qualifie son texte de « brouillon », c'est parce qu'il resterait à démontrer « à la manière des anciens » les vérités qu'il a établies « par le relief ».
(15) Grâce aux travaux de Pasch, Peano, Veronese, Hilbert, …
(16) Faut-il y voir une cause de la perte de sens dénoncée plus haut ? Sans doute, mais cela ne rend que plus nécessaire au niveau de l'enseignement d'expliciter l'histoire des concepts.

précisément une géométrie de Riemann, puisque dans le plan projectif deux droites distinctes ont toujours en commun un point(17).

Ses axiomes ont une propriété remarquable : si dans leurs énoncés on effectue les changements de la dualité, on obtient un énoncé valide de la théorie (un autre des axiomes, ou un théorème). Cela suffit à justifier logiquement le principe de dualité, sans invoquer la transformation par polaires réciproques.

La classification des géométries

Dans son fameux *Programme d'Erlangen* (1872), **Klein** classe les propriétés géométriques en trois grandes catégories emboîtées(18) :
– projectives : alignement, concours, birapport, contact, degré d'une courbe algébrique ;
– affines : les précédentes plus parallélisme, rapports de longueur, barycentre ;
– métriques : les précédentes plus distances, angles.

Il leur associe les transformations qui conservent ces propriétés : transformations projectives (ou homographies), transformations affines, transformations métriques (ou isométries). Chaque catégorie de transformations constitue un groupe(19) pour la composition, le groupe projectif contenant le groupe affine qui contient le groupe métrique (dit plutôt groupe orthogonal).

On démontre que les transformations projectives du plan ou de l'espace sont les transformations qui respectent l'alignement. Les transformations affines sont les transformations projectives conservant globalement la droite de l'infini (dans le plan), le plan de l'infini (dans l'espace)(20).

On note au passage l'importance qu'a prise la notion de transformation [13], dont la paternité peut légitimement être attribuée à Desargues.

La présentation actuelle

Aujourd'hui nous savons que la donnée d'un système d'axiomes équivaut à la définition d'une structure. On définit ainsi les structures d'*espace projectif*, d'*espace affine*, d'*espace affine euclidien*, qui sont les cadres respectifs des géométries du même nom.

---

(17) Bien sûr, les inventeurs des méthodes projectives, pas plus que Riemann, ne pouvaient en avoir conscience tant qu'ils particularisaient les éléments à l'infini.
(18) Nous simplifions beaucoup. En fait Klein distingue cinq types de propriétés, et intègre dans sa classification toutes les géométries non euclidiennes.
(19) Notion qui a émergé peu de temps auparavant, grâce à Galois, Cayley, Jordan, …

(20) En dimension 1, les fonctions homographiques sont de la forme $x \to \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $ad - bc \neq 0$; si $c \neq 0$, ∞ a pour image $\dfrac{a}{c}$ et pour antécédent $-\dfrac{d}{c}$; si c = 0, elles sont affines.

Ces trois structures sont adossées à la structure d'*espace vectoriel*, élaborée au début du XXe siècle(21) à partir de la notion de *vecteur*, issue à la fois de la géométrie et de l'algèbre. Les transformations associées à chaque structure sont déduites assez naturellement des transformations linéaires.

Pour ce qui est du plan projectif, la définition donnée au début peut maintenant se comprendre :
Le plan du tableau a été complété par la droite de l'infini pour être en bijection avec l'ensemble des droites issues de O. Or cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des directions de droites de l'espace, qu'on peut identifier aujourd'hui aux droites vectorielles. On peut donc d'emblée appeler plan projectif l'ensemble des droites vectorielles de l'espace de dimension 3.

Conclusion

Pour ceux qui ont gardé de la géométrie projective un souvenir mitigé, comme pour ceux qui n'y ont pas été formés, nous espérons que cette rapide *mise en perspective* aura amélioré leur *point de vue*. On voit que la géométrie projective a joué un rôle essentiel dans la progression des mathématiques, tant pour découvrir des résultats nouveaux que pour élaborer des méthodes de démonstration, et jusque dans la conception même de notre discipline.

On peut s'étonner de sa quasi-disparition des cursus de formation mathématique, alors même qu'elle a des applications importantes, notamment aujourd'hui en imagerie numérique.

À vrai dire, c'est la géométrie en général qui, après avoir été la reine des mathématiques, voit sa part de plus en plus réduite dans la formation des jeunes. Nos collègues physiciens, qui en ont besoin, se voient obligés de l'enseigner eux-mêmes ! Souhaitons que l'on revienne sur cette évolution, mais avec des méthodes d'enseignement rénovées, qui sachent motiver l'introduction des concepts.

Ainsi la genèse de la géométrie projective, outre qu'elle donne les clés de la compréhension de ses concepts, montre comment la mathématique est profondément liée à la culture globale de son époque.

Bibliographie

[1] BERGER Marcel, *Géométrie vivante ou l'échelle de Jacob*, Cassini 2009. Recensé dans le Bulletin nº 489. Voir les chapitres I et IV.

[2] BIOESMAT-MARTAGON Lise, *Éléments d'une biographie de l'espace projectif*, Presses Universitaires de Nancy, 2010.

[3] CHABOUD Marcel, *Girard Desargues, bourgeois de Lyon, mathématicien, architecte*, Aléas 1996. Recensé dans le Bulletin nº 405.

[4] CUPPENS Roger, *Faire de la géométrie supérieure en jouant avec Cabri-Géomètre II*, brochures APMEP nºs 124 et 125.

(21) Notamment par Grassman et Peano.

[5] DAHAN-DAMEDICO Amy et PEIFFER Jeanne, *Une histoire des mathématiques*, Seuil (Points sciences) 1986. Voir le chapitre 4.

[6] EFIMOV Nikolaï, *Géométrie supérieure*, éditions de Moscou, 1981.

[7] IREM de Basse Normandie, *Les cahiers de la perspective, Points de vue*, 7 cahiers, 1981-2002.

[8] LEHMANN Daniel, *Une introduction à la géométrie projective*, Ellipses 2005. Recensé dans le Bulletin n° 457.

[9] Manuels de géométrie, classes de mathématiques élémentaires années 1960, ou classes terminales C et E années 1970.

[10] MEHL Serge, site Chronomath : http://serge.mehl.free.fr/anx/geo_project.html

[11] PEIFFER Jeanne, *Histoire de la perspective*, disponible sur le site de la SMF : http://smf.emath.fr/Publications/Gazette/1998/78/smf_gazette_78_63-75.pdf

[12] ROLLAND Robert, *Géométrie projective*, IREM d'Aix-Marseille n° 30, 2005. Recensé dans le Bulletin n° 457.

[13] THIÉNARD Jean-Claude, *Notion de transformation*, 7 fascicules, IREM de Poitiers, 1994-1998.