Éloge des patrons

Philippe Langlois

Il ne s'agit pas ici de faire la publicité du MEDEF, mais de montrer l'usage que l'on peut faire d'un outil de géométrie dans l'espace.

Le mot « patron » figure dans les programmes du cours moyen et des trois premières années de collège, puis disparaît dans les oubliettes. Sans doute a-t-on considéré qu'une activité accessible dès les grandes classes de l'école primaire doit, de ce fait même, être abandonnée lorsque l'esprit de l'élève atteint une maturité suffisante. Il me semble pourtant à la fois outrecuidant et naïf de croire que, parce qu'un outil est élémentaire, il ne doit plus servir passé un certain âge(1).

Je voudrais montrer ici que, *de la sixième à la terminale incluse* (et sans aller chercher des polyèdres compliqués), les patrons peuvent fournir d'attrayants thèmes d'exercices, ainsi qu'un outil de découverte et à l'occasion de démonstration.

Les parties 1 et 2 peuvent être abordées au collège (voire au cours moyen), les parties 3 et 4 sont du niveau lycée.

1. Parallélépipède rectangle

1.1. Les onze patrons du cube

Quand on veut dessiner un patron du cube, on pense aussitôt aux classiques dessins en forme de T ou de croix latine (premier et second patron de la figure 1). En faire trouver d'autres est un bon exercice avec de jeunes élèves. Faire découvrir l'intégralité des neuf autres et surtout démontrer que ces onze patrons sont bien les seuls demande un effort de méthode et d'imagination.

N.B. : On ne considère pas ici comme distincts deux patrons dont l'un se déduit de l'autre en retournant sens dessus dessous la feuille de papier. Cela dit, un travail intéressant est de refaire le dénombrement en supprimant cette clause. Plus précisément : si on dispose de feuilles de papier ayant une face verte et une face blanche, combien de patrons verts distincts ?

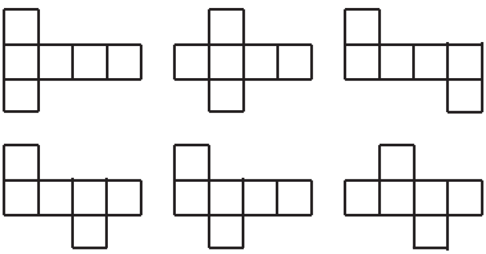

fig. 1

♦ Supposons qu'une face du cube soit horizontale : il a un dessus, un dessous et quatre faces latérales. Développons en ligne ces dernières ; il nous reste, pour compléter le patron, à mettre d'un côté la face supérieure, de l'autre la face inférieure. Nous obtenons ainsi six patrons distincts (figure 1).

(1) Refuserait-on l'usage du principe des tiroirs ou de la descente de Fermat sous prétexte qu'un non-mathématicien peut les comprendre aisément ?

♦ Pour lister les patrons n'ayant pas quatre faces alignées, nous utiliserons la remarque suivante.

Remarque (R) : Les faces du cube vont deux par deux, par paires de faces opposées, que nous noterons F (faces vues de front), P (faces vues de profil) et C (faces vues couchées). Dans un patron du cube, deux faces de même type ne peuvent se toucher ni par un côté, ni par un sommet. Il en résulte que, si un patron du cube contient trois faces disposées « en L » (figure 2, à gauche), ces trois faces sont de types différents, et qu'un patron ne peut contenir quatre faces disposées en carré (figure 2, à droite).

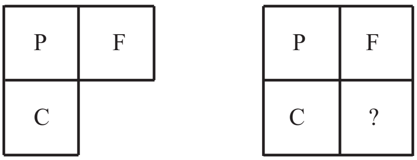

fig. 2

♦ Observons en outre que, si un patron contient trois faces « alignées », numérotées 1, 2, 3 dans l'ordre, les faces 1 et 3 sont forcément de même type. Il en résulte qu'une configuration comme celle de la figure 3 est impossible, car elle donnerait trois faces de même type.

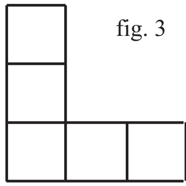
fig. 3

♦ Cherchons maintenant les patrons contenant un alignement de trois faces, mais pas d'alignement de quatre faces. On peut toujours supposer que l'on part d'une ligne du type P, F, P. Si aucune des autres faces n'a dans le patron un côté commun avec l'une des deux faces « P », on retombe sur un alignement vertical de quatre faces, ce que nous avons exclu. Il existe donc dans le patron une quatrième face longeant l'une des deux faces « P » précédentes ; d'après la remarque (R), elle est forcément du type C. On complète par deux faces (en grisé), en utilisant systématiquement la remarque (R), pour obtenir les quatre patrons de la figure 4a.

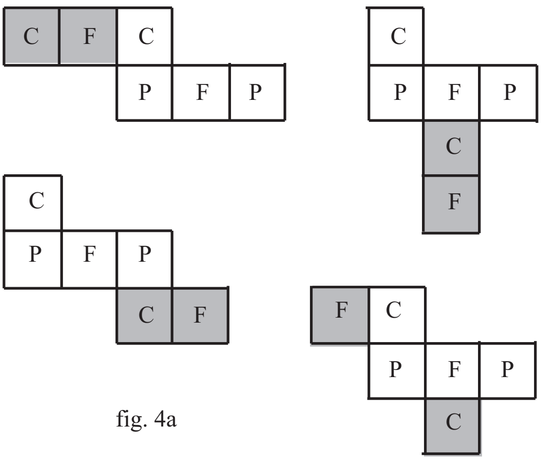

fig. 4a

♦ Reste à chercher les patrons ne contenant aucun alignement de plus de deux faces. L'application répétée de la remarque (R) mène au seul patron de la figure 4b.

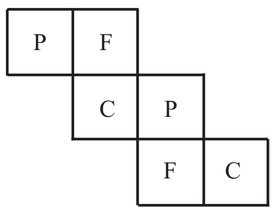

fig. 4b

1.2. Les cinquante-quatre patrons du parallélépipède rectangle

Soit un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont : longueur a, largeur b, hauteur c. Si les trois valeurs sont deux à deux distinctes, à chaque patron du cube correspondent six patrons du parallélépipède, correspondant aux six permutations de a, b, c.

La figure 5 donne à titre d'exemple, pour un même parallélépipède, les six croix latines possibles.

Pourquoi cinquante-quatre ?

Lorsque le patron du cube présente une symétrie centrale (patrons de droite de la figure 1, patron en haut et à gauche de la figure 4a, patron de la figure 4b), les six patrons de parallélépipède qui s'en déduisent sont deux à deux superposables. On a donc seulement ($6 \times 11 - 4 \times 3$) patrons distincts, soit 54.

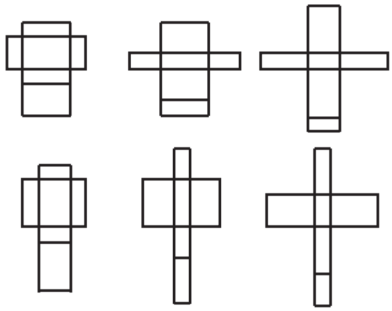

fig. 5

Exercice (niveau sixième)

Reconnaître sur un lot d'assemblages de six rectangles ceux qui sont le patron d'un parallélépipède rectangle.

1.3. Plus courts trajets

La recherche du plus court trajet entre deux points le long des parois d'un parallélépipède rectangle est un classique. Voici deux exercices sur ce thème.

Problème 1

Dans une grande pièce rectangulaire, une araignée est en haut d'un mur, à une distance h du plafond, à une distance x du mur contigu le plus proche. Elle veut aller sur le mur voisin en un point situé à la même distance x de l'angle des deux murs et à la même hauteur. Doit-elle longer les murs ou passer par le plafond ?

En longeant les murs, le plus court trajet est évidemment de rester à hauteur constante ; sa longueur est $2x$. En passant par le plafond, la figure 6b, qui représente un morceau du patron, montre immédiatement que le plus court trajet est de longueur $(h+x)\sqrt{2}$.

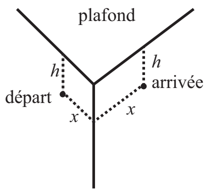

fig. 6a

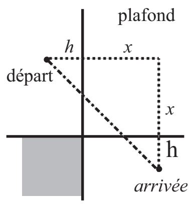

fig. 6b

L'araignée aura donc intérêt à passer par le plafond lorsque $2x > (h+x)\sqrt{2}$, ce qui revient à $x > h\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Problème 2

On donne un parallélépipède rectangle ABCDEFGH, *de côtés* AB = p, AD = q, AE = r. *Trouver le plus court chemin joignant les deux sommets* A *et* G *en longeant deux parois contiguës.*

Choisissons comme parois à parcourir ABCD et DCGH. Sur le patron de la figure 7b, il apparaît que le plus court chemin de A à G est celui qui a pour image le segment $[ag]$. Sa longueur est $\sqrt{p^2+(q+r)^2}$.

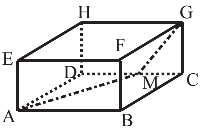

fig. 7a

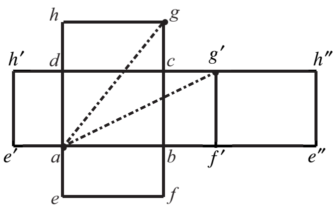

fig. 7b

De même, si l'on choisit les faces ABCD et BCGF, on voit sur ce même patron que le plus court chemin de A à G est celui qui a pour image $[ag']$; sa longueur est $\sqrt{q^2+(p+r)^2}$.

Compte tenu de la symétrie des données, la longueur du plus court chemin cherché est le plus petit des trois nombres $\sqrt{p^2+(q+r)^2}$, $\sqrt{q^2+(p+r)^2}$, $\sqrt{r^2+(p+q)^2}$. Si l'on suppose $p > q > r$, on voit aussitôt, en développant les quantités sous les trois radicaux, que les solutions sont la ligne brisée AMG (figure 7a), de longueur $\sqrt{p^2+(q+r)^2}$, dont l'image sur le patron est le segment $[ag]$, et sa symétrique par rapport au centre du parallélépipède.

N.B. 1 : Cet exercice peut faire l'objet d'une manipulation (patrons découpés, punaises, ficelle) dès le cours moyen.

N.B. 2 : Si la question posée est « trouver le plus court chemin joignant les deux sommets A et G en longeant les parois du parallélépipède », le problème se complique, puisqu'il faut examiner les trajets empruntant plus de deux parois. Il est intuitif que le résultat est le même, mais la justification est assez laborieuse.

2. Pentaèdres

La recherche de polyèdres à cinq faces peut être menée avec une classe de collège, voire à l'école élémentaire ; elle peut aussi donner quelque mal à des lycéens.

2.1. Un jeu facile

On donne cinq carrés et cinq triangles équilatéraux, tous de même longueur de côté. En prendre cinq pour former avec eux un polyèdre à cinq faces.

Les élèves voient assez vite qu'il manque un carré pour former un cube … et que, si on prend uniquement des triangles, ou il en manque un ou il y en a un qu'on ne sait pas caser. Il faut donc prendre au moins un carré et un triangle. On fait alors un patron : à partir d'un carré, on met contre chacun de ses côtés soit un triangle, soit un carré et on regarde si, par pliage, on peur refermer la figure en un polyèdre. On arrive sans trop de mal aux deux solutions : prisme triangulaire, pyramide à base carrée.

N.B. : On peut ensuite corser le jeu : en prenant tout ou partie des mêmes dix pièces, fabriquer d'autres polyèdres. On trouve, outre le tétraèdre régulier, le solide obtenu en posant sur un cube une pyramide à base carrée et celui obtenu en coiffant un prisme triangulaire par un tétraèdre régulier.

2.2. Une recherche méthodique

Avec des élèves plus âgés, on peut étudier un problème plus général : chercher tous les types de polyèdres à cinq faces.

La première chose à observer est qu'aucune face n'a plus de quatre côtés. Supposons qu'il existe une face n-gonale ($n > 4$) et faisons un patron « en étoile » à partir de cette face : chacun de ses côtés doit être bordé par une autre face, ce qui donnerait au polyèdre plus de cinq faces. Il faut donc se limiter à des triangles et des quadrilatères.

Comptons le nombre a d'arêtes en fonction du nombre t de triangles et du nombre q de quadrilatères : le nombre total de côtés des triangles est $3t$, le nombre total de côtés des quadrilatères est $4q$. Si on les additionne, on aura compté deux fois chaque arête, puisque chacune appartient à exactement deux faces. Donc $2a = 3t + 4q$, ce qui prouve que le nombre de triangles est forcément pair : 0, 2 ou 4. Une face au moins est donc un quadrilatère. Faisons un patron en étoile à partir d'une telle face Q.

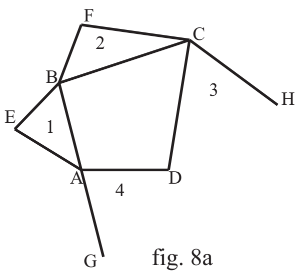

fig. 8a

• Supposons d'abord que parmi les polygones bordant Q, il y ait deux triangles (faces numérotées 1 et 2, les faces 3 et 4 étant de nature inconnue) longeant deux côtés adjacents. Avec les notations de la figure 8a, on observe, que si l'on plie selon les côtés de Q, les points E et F doivent venir en coïncidence. Mais de même F et H d'une part, E et G d'autre part, doivent venir se superposer. Au total, E, F, G, H aboutissent au même point S de l'espace : le solide est une pyramide et les faces 3 et 4 sont des triangles.

• Supposons maintenant que les polygones bordant Q soient successivement un triangle, un quadrilatère, un triangle, un quadrilatère (figure 8b). On voit que par pliage les points E, F, G vont être amenés à coïncider, de même que les points H, I, J. On obtient alors un solide ressemblant à un prisme triangulaire.

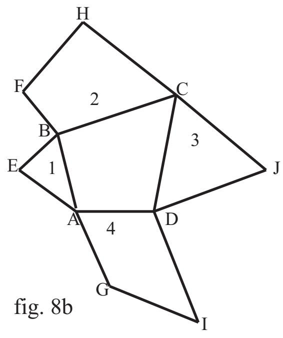

fig. 8b

• Nous avons ainsi épuisé toutes les configurations où parmi les polygones bordant Q il y a au moins deux triangles. Le seul cas restant à étudier est celui où toutes les faces sont des quadrilatères. On constate immédiatement (figure 8c) que la seule chose que l'on puisse obtenir par pliage est une boîte sans couvercle…

Finalement, il n'existe que deux types de pentaèdres : les pyramides à base quadrangulaire et les polyèdres construits sur le modèle du prisme triangulaire : un dessus et un dessous triangulaires, trois faces latérales quadrangulaires.

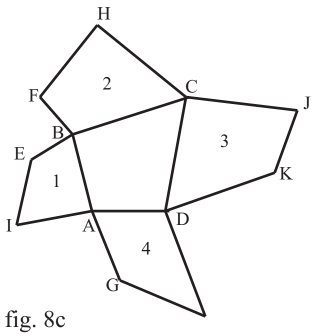

fig. 8c

N.B. : On peut être tenté de faire un travail analogue pour les polyèdres à six faces (hexaèdres). Mais la situation se complique notablement : au lieu de deux types, on en trouve sept (pour la liste complète, voir [2]). Ce qui peut être fait avec une classe, c'est une recherche non exhaustive d'exemples.

3. Tétraèdre

Reconnaître *a priori* (autrement qu'en découpant et pliant) si un assemblage donné de polygones d'un plan constitue ou non le patron d'un polyèdre est un problème plus délicat qu'on ne pourrait croire. Nous allons le traiter dans le cas le plus simple, celui du tétraèdre. Un préliminaire nous est indispensable, l'étude du patron d'un trièdre.

3.1. Patron d'un trièdre

Jusque dans les années soixante, tout bachelier « math élem » était censé connaître le résultat suivant :

Théorème

Étant donné trois angles α, β, γ compris strictement entre 0 *et* π, *il existe un trièdre* Oxyz *(non aplati) tel que* $\widehat{xOy} = \gamma$, $\widehat{yOz} = \alpha$, $\widehat{zOx} = \beta$ *si et seulement on a les inégalités*

$$\alpha < \beta + \gamma \ ; \beta < \gamma + \alpha \ ; \gamma < \alpha + \beta \ ; \alpha + \beta + \gamma < 2\pi.$$

La nécessité de ces inégalités peut être mise en évidence par pliage (très aisément pour les trois premières, un peu moins pour la dernière). Que ces conditions soient également suffisantes est moins intuitif.

Nous allons établir le théorème en bâtissant un patron.

Soit donc α, β, γ compris strictement entre 0 et π. On trace dans un plan un angle $\widehat{yOz}$ de mesure α. On reporte de part et d'autre vers l'extérieur $\widehat{yOu}$ de mesure γ et $\widehat{zOv}$ de mesure β. On veut qu'en repliant la feuille selon Oy et Oz, on puisse amener

Ou et Ov en coïncidence.

Soit sur Ou le point M tel que OM = 1 et sur Ov le point P tel que OP = 1. Dans le pliage selon Oy, M décrit un demi-cercle d'axe Oy ; dans le pliage selon Oz, P décrit un demi-cercle d'axe Oz. Le problème est de savoir si ces deux demi-cercles se coupent.

Comme ils sont situés sur la sphère S de centre O et de rayon 1, ils se coupent si et seulement si leurs projections sur le plan yOz se coupent. Ces projections sont les segments [MM′] et [PP′] de la figure 9.

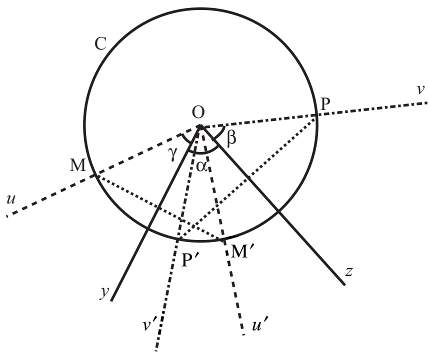

fig. 9

On peut donc construire le trièdre souhaité si et seulement les points M, P′, M′, P se succèdent dans cet ordre sur le cercle C intersection de S et du plan.

Or leurs angles polaires, comptés à partir de Ou, sont 0, $\gamma+\alpha-\beta$, 2γ, $\gamma+\alpha+\beta$. Nous avons donc la condition nécessaire et suffisante

$$0<\gamma+\alpha-\beta<2\gamma<\gamma+\alpha-\beta<2\pi,$$

ce qui équivaut à

$$\alpha<\beta+\gamma\ ;\ \beta<\gamma+\alpha\ ;\ \gamma<\alpha+\beta\ ;\ \alpha+\beta+\gamma<2\pi.$$

3.2. Patron d'un tétraèdre

Les deux types de patron

Étant donné un tétraèdre ABCD, on dispose de deux méthodes pour en tracer un patron : mettre les quatre faces « en ligne » (figure 10a) ou « en triangle » (figure 10b).

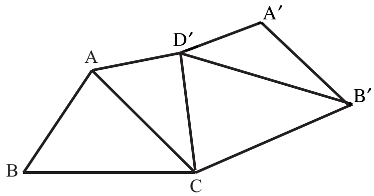

fig. 10a

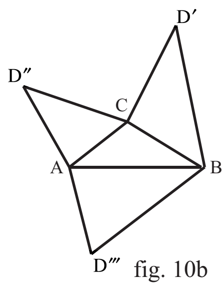

fig. 10b

Dans le premier cas, on « déroule » les faces en partant de la face ABC : d'abord la face ACD, le point D venant en D′, puis la face DBC, déroulée en D′B′C, enfin la face DBA, déroulée en D′B′A′. Dans le second cas, on « ouvre » le tétraèdre avec comme charnières les côtés du triangle ABC, le point D venant en D′, D″ et D‴.

Ce second modèle parle davantage à l'intuition ; c'est sur lui que nous allons travailler.

Reconnaître le patron d'un tétraèdre

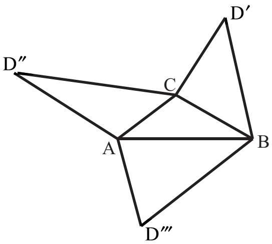

fig. 11a

Étant donné dans un plan un triangle ABC, on place dans ce plan trois points D′, D″ et D‴, de sorte que D′ soit par rapport à la droite BC du côté opposé à A, D″ soit par rapport à la droite CA du côté opposé à B, D‴ soit par rapport à la droite AB du côté opposé à C. A-t-on pour autant obtenu le patron d'un tétraèdre ?

Dans le cas de la figure 11a, la réponse est évidemment non : si on essaie de faire coïncider par pliage le long de CA et CB les points D′ et D″, on échouera, car les longueurs CD′ et CD″ ne sont pas égales.

Une condition nécessaire pour que la figure soit un patron est évidemment que l'on ait les trois égalités CD′ = CD″, BD′ = BD‴, AD″ = AD‴. Mais elle n'est pas suffisante : sur la figure 11b, il n'est pas possible d'amener les points D′ et D″ en coïncidence par pliage le long de CA et CB, car l'angle θ est supérieur à la somme des angles φ et ψ.

Supposons maintenant que soient réalisées, avec les notations de la figure 11b, les conditions nécessaires suivantes :

$$CD' = CD'',\ BD' = BD''',\ AD'' = AD''',$$

$$\theta < \varphi + \psi,\ \varphi < \theta + \psi,\ \psi < \varphi + \theta,\ \varphi + \theta + \psi < 2\pi.$$

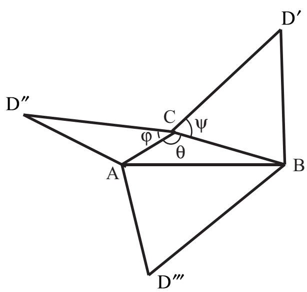

fig. 11b

Les inégalités angulaires assurent qu'avec les trois angles φ, θ, ψ on peut bâtir un trièdre : par pliage le long de CA et CB, on peut donc amener en coïncidence les demi-droites CD′ et CD″. Et comme CD′ = CD″, les deux points D′ et D″ viennent occuper la même position D. Les égalités BD′ = BD‴, AD″ = AD‴ permettent alors d'affirmer que les deux triangles ABD et ABD‴ sont isométriques, donc que l'on a bien un patron du tétraèdre ABCD.

3.3. Tétraèdre équifacial

Un tétraèdre est dit équifacial si ses quatre faces sont isométriques.

Propriété caractéristique

Un tétraèdre est équifacial si et seulement si les arêtes opposées ont même longueur.

Soit ABCD un tétraèdre. Si AB = CD, AC = BD, AD = BC, on vérifie sans peine que les quatre faces sont isométriques. Inversement, supposons que les quatre faces soient isométriques et que l'on ait par exemple AD ≠ BC. L'isométrie des triangles ABC et ABD entraîne alors AD = AC ; celle de ABC et ACD entraîne AD = AB. Les distances de D aux trois autres sommets sont donc égales. Le raisonnement fait pour D vaut pour chacun des autres sommets. Toutes les arêtes sont donc de même longueur, d'où contradiction.

Patron d'un tétraèdre équifacial

Soit un tétraèdre équifacial ABCD et faisons à partir de la face ABC un patron en triangle, le point D se rabattant en D′, D″ et D‴ (D′ opposé à A, D″ à B, D‴ à C). Des égalités DC = AB et DA = CB, on tire que ABCD″ est un parallélogramme ; de même CABD′ et BCAD‴ sont des parallélogrammes.

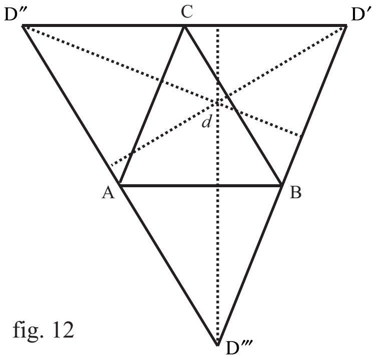

fig. 12

Il en résulte que (figure 12) le triangle ABC est le « triangle des milieux » du triangle D′D″D‴.

Notons que la projection orthogonale *d* du sommet D en question sur le plan est l'orthocentre du triangle D′D″D‴, puisque, lors du pliage selon BC, par exemple, le point D′ décrit un arc de cercle d'axe BC, se projetant selon un segment orthogonal à BC.

Réciproque

Prenons dans un plan un triangle ABC *; existe-t-il un tétraèdre équifacial dont* ABC *soit une des faces ?*

D'après ce qui précède, le seul patron possible s'obtient en menant de chaque sommet la parallèle au côté opposé. Cela donne un triangle D′D″D‴ tel que A soit le milieu de D″D‴, B le milieu de D′D‴, C le milieu de D′D″. Reste à voir si c'est bien un patron de tétraèdre, c'est-à-dire si les conditions nécessaires et suffisantes établies en 2.2. sont bien réalisées. Les conditions sur les longueurs le sont. Restent les conditions sur les angles. On voit aussitôt qu'il est nécessaire et suffisant que le triangle ait ses trois angles aigus.

D'où le théorème :

Les faces d'un tétraèdre équifacial ont tous leurs angles aigus.

4. Octaèdre régulier

L'octaèdre régulier est lui aussi une bonne source d'exercices soit de géométrie pure, soit de géométrie analytique (ne serait-ce qu'à cause de l'extrême simplicité de son équation dans un repère bien choisi : $|x|+|y|+|z|\leq a$).

Il est aisé d'en fabriquer des patrons. En dresser une liste exhaustive l'est un peu moins. Nous laissons ce travail à la sagacité du lecteur. Mais, à partir d'un patron, nous allons démontrer une propriété assez peu connue.

4.1. Le « tour de taille » de l'octaèdre

Posons un octaèdre régulier Ω sur une de ses faces ABC, considérée comme horizontale. Les trois autres sommets sont les symétriques A′, B′, C′ de A, B, C par rapport au centre O de Ω formant une seconde face horizontale. Les autres faces sont ABC′, AB′C, A′BC, AB′C′, A′BC′, A′B′C que nous appellerons faces latérales.

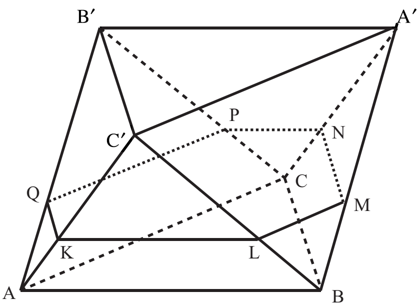

fig. 13a

Soit maintenant un plan horizontal Π ; il coupe les faces latérales selon des segments horizontaux : KL sur la face ABC′, LM sur la face A′BC′ et ainsi de suite, avec les notations de la figure 13a. On obtient ainsi un hexagone KLMNPQ.

Faisons un patron de Ω développant « en ligne » les faces latérales (figure 13b). Sur ce patron, l'hexagone KLMNPQ se développe sur une droite parallèle aux droites portant le développement des deux « bases » ABC et A′B′C′.

On lit sur la figure 13b le résultat suivant : *le périmètre de l'hexagone est indépendant du choix de* Π et vaut 3*a*, où *a* désigne la longueur de l'arête de Ω.

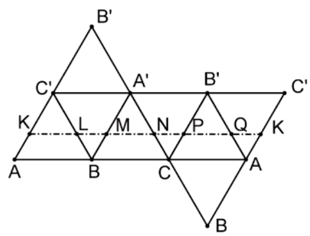

fig. 13b

On peut noter de plus que les côtés opposés sont parallèles (ainsi KL est parallèle à AB, lui-même parallèle à A′B′, lui-même parallèle à NP, donc KL et NP sont parallèles). On lit en outre sur le patron que, si l'on numérote dans l'ordre les côtés de l'hexagone, les côtés 1, 3, 5 ont même longueur et les côtés 2, 4, 6 ont même longueur.

4.2. Généralisation

Sur le modèle de ce que l'on vient de faire pour l'octaèdre, on peut bâtir des patrons de polyèdres « semi-réguliers » à tour de taille constant.

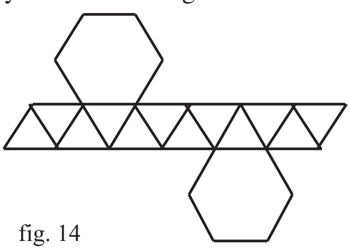
fig. 14

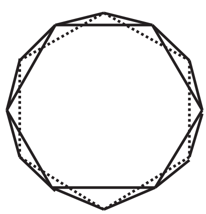
fig. 15

On aligne en une bande horizontale $2n$ triangles équilatéraux(2), on colle par-dessus un n-gone régulier et un autre par-dessous, conformément au schéma de la figure 14 (fait pour $n = 6$). On obtient le patron d'un polyèdre aux belles propriétés de symétrie, qu'on appelle un antiprisme.

La figure 15 représente la projection de ce polyèdre sur le plan d'une de ses bases.

N.B. : La même méthode permet d'établir que les sections d'un tétraèdre équifacial par un plan variable parallèle à un couple donné d'arêtes opposées sont des parallélogrammes de même périmètre.

Conclusion

Je voudrais avoir convaincu le lecteur qu'il y a plus dans les activités sur les patrons qu'un jeu d'enfant et qu'elles peuvent être l'occasion d'une véritable réflexion mathématique. Mais je crains que certains ne soient choqués par le recours systématique aux pliages et n'y voient le triomphe de l'à-peu-près, l'abdication du raisonnement devant l'intuition sensible.

Qu'ils veuillent bien se dire que tout ce qui a été fait ici peut être rendu formellement correct en y ajoutant quelques couches de peinture, notamment en remplaçant « pliage » par « rotation autour d'un axe ». Il n'y a au fond (tout au moins je l'espère) dans ces pages, pour reprendre une formule de Nicolas Bourbaki, que « les abus de langage sans lesquels tout texte mathématique deviendrait pédantesque et même illisible ».

Bibliographie

[1] http://semsci.u-strasbg.fr/construc.htm
Conçu pour piquer la curiosité d'adolescents, présente dix-huit polyèdres réguliers ou semi-réguliers et donne pour chacun un patron.

[2] http://www.ac-noumea.nc/maths/polyhedr
Plus austère et plus complet. Donne une présentation claire des polyèdres usuels (et notamment des sept types d'hexaèdres) ; ne s'intéresse pas aux patrons.

[3] Guy Le Berre, *L'évasion des polyèdres*, chapitre 7.
Recensé dans le BV nº 468, page 127.

(2) Ou plus généralement $2n$ triangles isocèles de base horizontale.