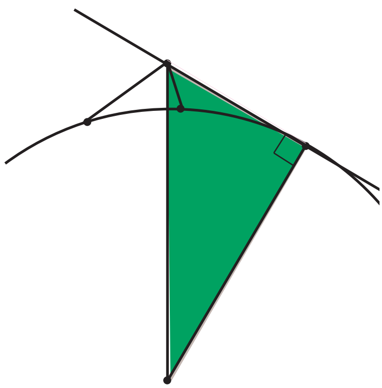
Pourquoi la géométrie ?

Jean-Pierre Kahane(*)

Au moment d'écrire ce petit article, je reçois le numéro spécial de *Tangente* sur « Mathématiques et géographie, la Terre vue des maths ».

Je pense tout de suite aux merveilleux TPE que l'on peut bâtir à partir de ce document. Et voici ce qu'il m'inspire.

La géométrie tire son nom de la mesure de la Terre. Y prête-t-on suffisamment attention quand on l'enseigne ? Quand Égée a guetté le retour de Thésée il est monté en haut du cap Sounion ; la hauteur du promontoire et la distance que ses yeux pouvaient parcourir donnent une première idée de la rotondité de la Terre et de son diamètre. Inversement, sachant que le tour de la Terre fait 40 000 kilomètres, une promenade le long d'un sentier des douaniers est l'occasion de tester visuellement l'usage d'une figure simple et du théorème de Pythagore.



À l'époque d'Henri le Navigateur(1) commencent à se poser des questions, plus difficiles, de repérage en mer. La hauteur de la Polaire, ou à défaut du Soleil au zénith, donne bien la latitude ; mais comment déterminer la longitude ? L'astronomie et la construction des horloges ont rivalisé pour apporter des solutions. Mais à l'époque de la Révolution française le problème était resté une motivation forte pour des travaux importants : c'est l'origine et la raison d'être du Bureau des longitudes, dont le premier responsable fut Arago, et dont la présidence est actuellement assurée par l'astronome Nicole Capitaine, fille de l'historien des sciences René Taton.

La géométrie est inséparable de l'histoire des mathématiques et de l'histoire humaine en général. Quid de son intérêt actuel, en relation toujours avec la géographie ? On peut évoquer les satellites et le GPS. Je vais m'en tenir à la

(*) jean-pierre.kahane@math.u-psud.fr

(1) Prince du Portugal, l'infant Henri (1394-1460), passionné de navigation, organisa l'exploration des côtes africaines et favorisa l'essor de la cartographie et de la construction navale.

cartographie. C'est un monde de découvertes mathématiques : que signifient les lignes de niveau, les lignes de plus grande pente, les sommets, les cuvettes, les cols, les bassins d'attraction des eaux, les reliefs, les contours et leur fractalité ? On peut faire d'excellentes mathématiques à partir d'une carte de l'IGN. Nos collègues littéraires devraient nous demander de commenter pour eux les premiers vers du Voyage(2), de Baudelaire :

> Pour l'enfant, amoureux de cartes et d'estampes,
> L'univers est égal à son vaste appétit.

C'est vraiment un univers mathématique qui s'ouvre avec la contemplation d'une carte.

Nous voyons la géométrie à l'œuvre dans les transports, dans l'exploration spatiale, dans la robotique avec le merveilleux problème, élucidé par Olivier Faugeras, du repérage dans l'espace à partir de capteurs situés sur le robot. Pouvons-nous en dire plus, sur la géométrie dans la vie courante, et sur la géométrie comme science ?

Dans la vie courante, il n'est pas mauvais d'évaluer la surface de son appartement. Comment ? Toutes les pièces ne sont pas rectangulaires, mais presque toutes sont décomposables en triangles. Comment varient les surfaces avec les longueurs ? Cela a beau être l'objet de la plus ancienne leçon de mathématiques dont la littérature ait gardé trace, à savoir l'entretien de Socrate avec l'esclave de Ménon au sujet du doublement du carré, c'est un apprentissage fondamental de la notion de dimension. Quelle est la masse d'air contenue dans une salle de classe ? Et d'abord, quel en est le volume ? Comment varient les volumes avec les longueurs ? Si on fabrique des boules toutes égales avec de la terre glaise, combien en faudra-t-il pour fabriquer une boule de diamètre double ? Dans les belles figures d'objets autosimilaires que l'on trouve dans les ouvrages de Benoît Mandelbrot, que signifie la dimension et comment peut-on l'évaluer ?

Je viens d'évoquer la géométrie fractale. Comme science, la géométrie est multiforme, elle interagit avec presque toutes les sciences, la physique et maintenant la biologie en premier lieu, et c'est une composante essentielle des mathématiques. On n'imagine pas les équations aux dérivées partielles sans la géométrie différentielle, ni la théorie des nombres sans géométrie algébrique. La géométrie du triangle, que naguère on a traitée de haut, a été complètement renouvelée comme trait d'union entre le discret et le continu, selon les idées de Gromov, qui font reposer les géométries non-euclidiennes sur les propriétés de leurs triangles. L'analyse fonctionnelle conduit à la géométrie des espaces de Banach, qui à son tour retentit sur la théorie des probabilités. On pourrait dire qu'il existe des géométries au lieu de parler de la géométrie. Parler de la géométrie a néanmoins un sens, comme de parler de la mathématique. Dans le grand réseau des mathématiques contemporaines la géométrie circule comme un liquide nourricier.

(2) Les Fleurs du Mal, CXXVI.

Tous les mathématiciens ne sont pas géomètres, mais la plupart le sont. Dans la variété des œuvres de Riemann il y a un trait commun : l'intuition géométrique. Gustave Choquet citait volontiers Lebesgue :

> J'ai toujours été guidé dans mes recherches par des considérations géométriques et, si je ne puis donner aucun de mes mémoires comme une application caractérisée de l'Analyse à la Géométrie, il me semble que j'ai fait constamment des applications de la Géométrie à l'Analyse.

La géométrie permet de structurer des images mentales, et c'est d'images mentales qu'est constitué pour une grande part l'outillage intellectuel du mathématicien.

Quid des enfants, dont bien sûr la plupart ne deviendront pas des mathématiciens ? J'aime bien me référer à Condorcet, qui disait à leur propos :

> Les chiffres, les lignes, parlent plus qu'on ne le croit à leur imagination naissante, et c'est un moyen sûr de l'exercer sans l'égarer(3).

Les enfants comptent et dessinent, et les dessins d'enfants ne sont pas des figures géométriques. Cependant on y trouve une stylisation de la réalité qui s'apparente à une abstraction. Les figures géométriques peuvent les fasciner, et les familiariser, qu'on en parle ou non, avec les symétries, les translations et les rotations, les homothéties et les similitudes ; cercles et lignes polygonales forment déjà un matériel considérable pour des expériences réelles et mentales. Les premières découvertes et les premières démonstrations peuvent être des illuminations. Même si les illuminations tardent à venir, il est bon d'avoir dans l'esprit des figures simples et riches, dont l'exemple type est un triangle rectangle pourvu de sa hauteur. Un peu de géométrie sphérique ramène à la géographie, un peu de géométrie des graphes à l'informatique. Le choix est infini.

L'important dans le choix est moins d'accumuler des connaissances que de très bien comprendre comment s'enchaînent les propriétés géométriques. Les définitions et les démonstrations doivent soulager la mémoire, au prix d'un effort de mémoire minimum. « Fait-on assez, disait Galois, pour que le raisonnement devienne comme une seconde mémoire ? ». Galois pensait à des études déjà avancées. Mais dès le départ la géométrie s'offre comme un champ privilégié pour exercer l'imagination sans l'égarer, selon la formule de Condorcet.

Pourquoi la géométrie ?

Parce qu'on ne peut pas s'en passer, parce que c'est l'une des belles conquêtes de l'humanité, et parce que c'est un merveilleux exercice intellectuel. Sans compter mille autres raisons.

---

(3) dans son « discours sur les Sciences Mathématiques prononcé au Lycée le 15 février 1786 » qu'on trouve sur le site Gallica à l'adresse :
http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k58105584/f682.image.pagination