Expériences, modèles, simulations

Gilles Aldon(*)

Dans cet article, je voudrais présenter deux expériences menées dans des contextes différents ; la première a été menée dans le cadre d'une classe européenne regroupant des élèves de Seconde, Première S et Terminale S. La seconde a été réalisée dans une classe de Terminale S et s'appuie sur une situation mathématique proposée par Luc Trouche (1998). Je montre ici un aspect lié à l'investigation par des élèves d'une petite partie des mathématiques ayant pour déclencheur une situation problématisée.

Dans une première partie j'essaierai de montrer la différence entre la recherche d'un problème et une situation d'investigation en mathématiques. Dans un second temps je décrirai le travail réalisé dans les classes et essaierai de dégager les éléments importants permettant de mener à bien de telles expériences.

Vous avez dit : investigation ?

Le terme « démarche d'investigation » est plutôt utilisé dans les enseignements des sciences expérimentales. Les expérimentations visant à rénover l'enseignement scientifique au lycée s'inscrivent dans un contexte international de désaffection des filières scientifiques comme souligné par le rapport Rocard (OCDE, 2006) et visent à proposer une modification de l'enseignement des sciences en impliquant les élèves dans une réflexion à propos de problèmes scientifiques cruciaux. Les élèves sont ainsi conduits à mener leurs propres investigations de manière autonome. Une des difficultés importantes est la question de l'élaboration de situations, suffisamment riches pour permettre une réelle investigation, et suffisamment accessibles pour pouvoir être abordées par les élèves en autonomie. Il est clair que mettre les élèves en autonomie nécessite une mise en situation construite par l'enseignant, permettant de confier la responsabilité de tâches aux élèves. Dans ce contexte, les « problèmes longs » développés et étudiés à l'IREM de Lyon dans le prolongement des « problèmes ouverts », articulent le programme de mathématiques d'une classe et la recherche d'un problème ; les notions enseignées en classe deviennent autant d'outils nouveaux pour explorer un peu plus le problème, explorer, *investiguer* une petite partie des mathématiques. La dimension expérimentale des mathématiques permet ainsi de faire entrer les élèves dans des démarches actives vis à vis de leurs apprentissages. Mais, tout comme dans les sciences expérimentales, l'expérience n'a de sens que lorsqu'elle débouche sur des questions sur les résultats observés ; comme le dit Viviane Durand-Guerrier dans le cédérom EXPRIME(1) publié à l'INRP :

« *Ce qui caractérise la dimension expérimentale en mathématiques, c'est le va-et-vient entre un travail avec les objets que l'on essaye de définir et de délimiter et*

(*) gilles.aldon@inrp.fr

(1) http://www.inrp.fr/publications/catalogue/web/Notice.php?not_id=BD+163

l'élaboration et/ou la mise à l'épreuve d'une théorie, le plus souvent locale, visant à rendre compte des propriétés de ces objets. »

Ce que l'on peut alors appeler expérience en mathématiques, c'est le travail sur des représentations naturalisées des objets mathématiques. Le terme « naturalisé » étant à prendre au sens de la maîtrise des transformations internes à un registre de représentation sémiotique d'un objet ou des conversions d'un registre dans l'autre. L'« expérience » ayant alors comme objet de délimiter ou d'explorer les propriétés de l'objet en lien avec une théorie. C'est en ce sens que l'on peut comprendre cette citation de Kant :

« *Que l'on prenne, par exemple, seulement les concepts de la Mathématique, en les envisageant tous dans leurs intuitions pures : l'espace a trois dimensions, entre deux points on ne peut tirer qu'une ligne droite, etc. Quoique tous ces principes et la représentation de l'objet dont s'occupe cette science, soient produits tout a fait a priori dans l'esprit, ils ne signifieraient pourtant absolument rien, si nous ne pouvions pas toujours en montrer la signification dans des phénomènes (dans les objets empiriques). Aussi est-il indispensable de rendre sensible un concept abstrait, c'est-à dire de montrer dans l'intuition un objet qui lui corresponde, parce que sans cela le concept n'aurait, comme on dit, aucun sens, c'est-à-dire aucune valeur.* »[(2)]

Ce sont ces réflexions que je voudrais illustrer dans les paragraphes qui suivent en m'appuyant sur des travaux menés dans deux contextes bien différents : d'une part un travail en classe européenne et d'autre part dans une classe de Terminale S.

De la boule à la Terre

Ce travail s'est déroulé dans une classe d'un lycée de la banlieue lyonnaise, à Vénissieux[(3)]. Une section « européenne » a été ouverte dans cet établissement pour permettre aux élèves des collèges du secteur de poursuivre au lycée l'option européenne commencée au collège. Cette option a été, de plus, ouverte à tous les élèves volontaires sous réserve d'une motivation suffisante à suivre deux heures par semaine d'un enseignement de mathématiques en anglais. Lorsque cette expérience a été réalisée, le nombre d'élèves participant à ces classes européennes était, toutes classes confondues, de quinze. C'est la raison pour laquelle tous ces élèves venant de Seconde, Première S et Terminale S ont été regroupés dans un même créneau horaire de deux heures par semaine. Une des difficultés d'enseignement était bien sûr la gestion de trois niveaux de classe bien différents les uns des autres. De façon à gérer cette hétérogénéité, le travail proposé reposait sur des concepts mathématiques qu'il était possible d'aborder dès la classe de Seconde, mais suffisamment résistants pour pouvoir alimenter une réflexion en classe de Première et de Terminale.
Ainsi, dans cette classe européenne, un grand nombre des sujets abordés mettaient les élèves en action dans des démarches leur permettant de poser des problèmes puis

(2) Kant, Emmanuel. Critique de la raison pure ; nouvelle traduction française, avec notes, par A. Tremesaygues, et B. Pacaud ; préface de A. Hannequin. 2nde éd. (1787/1905). Alcan Éditeur. Page 253. BNF http://gallica.bnf.fr
(3) Lycée Jacques Brel, Vénissieux.

d'explorer des petites parties des mathématiques donnant des clefs de compréhension du phénomène observé. Par exemple,

- Mesure des dimensions de la cour de récréation en restant à l'intérieur de la salle de classe.
- La planche de Galton : histoire, théorie et simulation.
- Comment multiplier deux nombres ?
- Résolution d'une équation du troisième degré : vers les nombres complexes, histoire, petites histoires, théorie.
- Etc.

Bien entendu, dans chacun de ces thèmes, les rôles des élèves des différentes classes variaient en fonction de leurs connaissances et des programmes de mathématiques, mais tous s'ancraient sur l'histoire des mathématiques et se prolongeaient par des simulations sur ordinateur ou des expériences concrètes. Nous nous intéresserons dans cet article à un travail spécifique réalisé dans cette classe et dont l'objet était la mesure du rayon de la Terre. Nous avons profité du fait que les élèves correspondaient avec des élèves polonais d'une école d'une petite ville de Haute Silésie (Łaziska[4]) pour poser la question de la distance entre les deux villes à la surface de la terre. L'ensemble du travail présenté s'est déroulé sur huit semaines, soit seize heures. La première partie a consisté à poser le problème ; le cours se déroulant en anglais, j'ai utilisé des enregistrements audio et des textes provenant du site « Engines of our ingenuity » (http://www.uh.edu/engines/) de l'Université de Houston en Californie. Ces documents de vulgarisation expliquent l'histoire de la mesure et très brièvement la méthode :

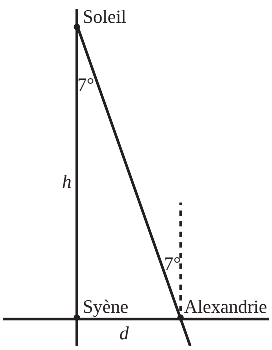
« *The bottom of the well was lit by the sun at noon during the summer solstice. At that moment the sun was straight overhead. Eratosthenes realized he could measure the shadow cast by a tower in Alexandria while no shadow was being cast in Aswan. Then, knowing the distance to Aswan, it'd be simple to calculate Earth's radius. (You geometry students, try that one.)* »[5]

Partant de ce court paragraphe, j'ai alors demandé aux élèves de relever le défi proposé par l'auteur de ce texte. C'est vraiment en partant de ces documents (textes et audios) que les élèves ont commencé à travailler. Contrairement à des travaux pratiques où les intentions du professeur sont prépondérantes et la démarche imposée, c'est petit à petit que les questions ont surgi du travail collectif des élèves : comment repérer les villes sur la terre, et en modélisant le questionnement, comment se repérer sur la sphère ? Connaissant les latitudes et longitudes des deux villes, comment calculer la distance entre les deux villes ? Quel est le plus court chemin entre deux points d'une sphère ? Quel est le lien avec l'expérience d'Ératosthène de

(4) Prononcer : Ouaziska.
(5) Le fond du puits était éclairé par la lumière du soleil à midi le jour du solstice d'été. À cet instant le soleil était exactement au dessus du puits. Ératosthène réalisa alors qu'il pouvait mesurer l'ombre d'une tour à Alexandrie à l'instant précis où il n'y avait plus d'ombre à Aswan. Ainsi, connaissant la distance entre Alexandrie et Aswan, il était simple de calculer le rayon de la terre. (Vous, élèves en géométrie, essayez de le faire !)

la mesure du rayon de la terre connu des élèves, puisque faisant partie du programme de physique ? Comme professeur, j'ai successivement reformulé les propositions parfois maladroites des élèves, encouragé à poursuivre des pistes, régulé le travail, favorisé les prises de parole(6) et la rédaction de textes de présentation, rappelé quelques notions nécessaires ou renvoyé vers des lectures complémentaires.

Le travail confié aux élèves de seconde fut alors de comprendre et de traduire dans un langage mathématique « opérationnel » en ce sens qu'il leur permette de construire l'expérience. Un travail spécifique sur l'histoire des mathématiques, (replacer Alexandrie(7) dans le contexte scientifique du troisième siècle avant Jésus-Christ), mais aussi des rappels sur les cartes et leur histoire(8), sur le repérage d'un point sur la terre dans un système de coordonnées cartésiennes ou géographiques et le passage de l'un à l'autre, furent des éléments importants de l'investigation que les élèves de Seconde firent dans cette première partie ; en Première, les élèves se sont penchés sur la question des hypothèses fondant cette méthode : ou bien le soleil est suffisamment loin de la Terre pour que l'on puisse considérer les rayons comme parallèles et la méthode d'Ératosthène permet le calcul du rayon de la Terre, ou bien, le soleil est proche de la Terre qui est plate comme Anaxagore(9) le pensait et l'expérience montre que la distance du soleil se calcule comme le rapport de la distance entre les deux villes et la tangente de l'angle, soit :



$$h = \frac{d}{\tan(\alpha)} = \frac{800}{\tan(7°)} \approx 6\,515\,\text{km}.$$

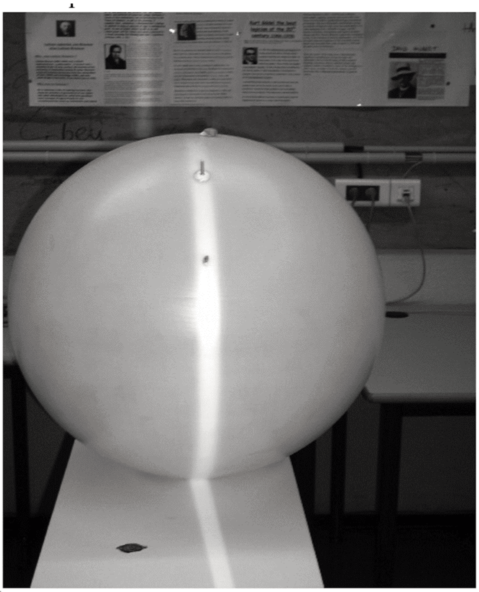
Expérience en laboratoire

En s'appuyant sur ces documents et sur leurs connaissances (la méthode d'Ératosthène avait été vue de façon théorique en physique) les élèves de Seconde ont mis au point une expérience pour « tester » la méthode en mesurant le rayon d'une boule (en fait, un abat-jour d'un des lampadaires du lycée resté en réserve dans les caves du lycée).

Pour réaliser cette expérience, il a fallu un rétroprojecteur, une boule, deux bâtonnets, un peu de colle et une règle souple permettant donc de mesurer une distance sur la surface de la sphère.-

(6) Il s'agit d'un objectif des enseignement en DNL que de favoriser la prise de parole dans la langue.
(7) http://www.uh.edu/engines/epi1422.htm
(8) http://www.uh.edu/engines/epi889.htm
(9) Philosophe et mathématicien grec (500-428 avant J.-C.)

Le matériel : un rétroprojecteur, une boule dont il s’agit de déterminer le rayon, deux bâtonnets collés sur la sphère « verticalement ».



Un film a été tourné par les élèves lors de l’expérimentation dans le but de montrer le type de travail réalisé dans la classe européenne du lycée lors des journées portes ouvertes. Un extrait de ce film peut être vu sur le site de Mathematice(10).

Par ailleurs, les élèves de Première et Terminale se sont attelés à une simulation des positions respectives des deux villes sur la sphère terrestre en utilisant Geospace et à convertir les coordonnées sphériques et cartésiennes(11).

Le travail avec Geospace m’a également permis de faire

(10) http://revue.sesamath.net/spip.php?article257 ou bien téléchargeable dans le sommaire du numéro.
(11) Les figures Geospace sont téléchargeables sur le site de l’APMEP, dans le sommaire du numéro.

construire une carte par projection plane en partant des contours de la France repérée par ses coordonnées géographiques.

Les élèves de Terminale ont eu, quant à eux, à résoudre le problème de la détermination de l'heure à laquelle l'expérience si elle avait lieu entre les deux villes devrait être réalisée ; en effet, contrairement à Alexandrie et Syène situées à peu près sur un même méridien, Vénissieux et Laziska sont à des longitudes différentes. « À quelles heures le soleil est-il aligné avec le grand cercle passant par ces deux villes ? » a été la question que les élèves de Terminale ont résolue.

Ce travail d'investigation avait par ailleurs un but pour les élèves puisqu'ils ont eu en charge d'expliquer à leurs homologues polonais les résultats auxquels ils étaient arrivés et par conséquent de synthétiser leurs recherches lors du voyage que la classe européenne a effectué en Pologne.

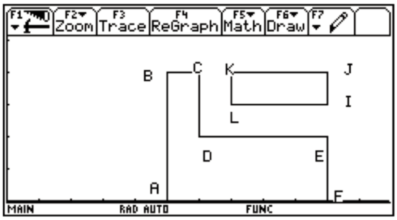
Ce premier compte rendu est bien sûr réalisé dans des conditions très particulières : enseignement en anglais, heures dédiées, trois niveaux dans la même classe qui en font une expérience unique certainement difficilement généralisable dans des classes ordinaires. Il n'en reste pas moins que le travail complémentaire fait par les élèves de différents niveaux, la nécessité de rendre compte, qui plus est en anglais, à des pairs, de leurs travaux ont été des éléments suffisamment motivants pour maintenir sur plusieurs semaines un intérêt pour la recherche et la réalisation de cette activité. Dans le deuxième exemple, je voudrais cette fois parler d'une expérience réalisée dans une classe « ordinaire ».

La trajectoire de l'avion

Ce deuxième exemple pour illustrer un travail d'investigation en mathématiques est un travail effectué en classe de Terminale S et ayant comme support le problème de la trajectoire de l'avion (Trouche, 1998, Aldon, 1999). Les élèves de cette classe avaient à leur disposition au moment de cette expérience une calculatrice TI-92.

Énoncé du problème

Le dessin est une modélisation des contraintes s'exerçant sur la trajectoire d'un avion : Il décolle en O, origine du repère, doit passer au dessus d'un relief qui culmine en B, puis passer au dessus du plateau [DE], mais sous la masse nuageuse (IJKL), et enfin atterrir sur une piste qui commence en F, et de longueur infinie. Le contact avec la piste, pour qu'il soit le plus doux possible doit se faire « à l'infini ».



Les points ont les coordonnées suivantes : O(0,0), A(5,0), B(5,4), C(6,4), D(6,2), E(10,2), F(10,0), I(10,3), J(10,4), K(7,4), L(7,3).

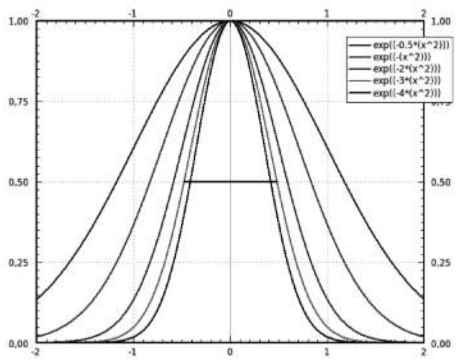
1) Déterminer une fonction dérivable sur $[0,+\infty[$, dont la représentation graphique satisfasse à toutes ces contraintes.

2) Dans un deuxième temps, on veut optimiser le trajet. L'idée est que l'avion « monte le moins possible ». Cela peut se comprendre d'au moins deux façons :

- l'avion transporte des passagers et le pilote s'arrange pour que, sur le trajet, la pente maximale de l'avion (en valeur absolue) soit la plus faible possible. Pour deux fonctions f et g, on considèrera $\sup(|f'|)$ et $\sup(|g'|)$. La fonction qui aura le plus petit sup sera réputée la meilleure.
- l'avion est un avion espion. Il devra donc voler au plus près des reliefs.

Ce problème a été proposé comme un « problème long » ; il a en effet été donné à la classe en début d'année (au mois de novembre) et s'est poursuivi tout au long de l'année, rebondissant lorsque de nouveaux outils étaient rendus disponibles par l'avancée du cours de mathématiques (fonction exponentielle, calcul intégral, …). Le problème n'est pas un problème de modélisation au sens strict du terme. Aucun avion n'atterrit à l'infini, peu de nuages restent fixes au dessus d'une montagne, etc. Très rapidement, le modèle mathématique a été privilégié et l'avion n'était plus qu'une métaphore lointaine à laquelle cependant les élèves (ou le professeur) faisaient référence pour justifier des choix d'ordre mathématique : continuité et dérivabilité des trajectoires, rejet de « pentes » trop importantes ou de maximum trop grand, etc. Il ne s'agit pas ici de relater l'ensemble du travail mené par les élèves de cette classe de Terminale S dans le temps, mais plutôt de s'attarder sur le comportement d'un groupe de quatre élèves à un moment donné de leurs recherches. Alors que l'énoncé du problème avait été donné dès le début de l'année, dans le cours de mathématiques, j'ai abordé la fonction exponentielle et, en guise d'exercice, donné aux élèves l'étude de la fonction gaussienne : $x \to \mathrm{e}^{-x^2}$.

Pour ce groupe d'élève, la représentation graphique de la fonction est apparue comme une solution potentielle au problème de la trajectoire de l'avion, et cet exercice, somme toute banal, a été le déclencheur d'une étude approfondie des courbes des fonctions de la forme e^{-kx^2} avec k un nombre réel positif. L'utilisation de la calculatrice graphique montre rapidement que plus k est petit et plus la courbe est « large » ; et c'est précisément cette notion que les élèves ont défini puis étudié (ci-dessous sont reproduites les définitions et propriétés exposées à la classe lors d'une mise en commun) :



« On appellera largeur de la courbe, la longueur du segment reliant les points de la courbe d'ordonnée 1/2. »
Pour ensuite arriver à la propriété :

« La largeur de la courbe de la fonction $x \to \mathrm{e}^{-kx^2}$ vaut $2\sqrt{\dfrac{\ln 2}{k}}$. »

et enfin
« La largeur de la courbe est une fonction décroissante de k et est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$. »
Chacune des propriétés était accompagnée d'une démonstration et illustrée sur la calculatrice. Le problème initial n'est pas résolu, mais l'étude réalisée montre bien à la fois l'investissement des élèves et les pistes qui peuvent être encore explorées. C'est bien sûr vers ces pistes que les commentaires de cet exposé sont allés et les élèves sont repartis en ayant pour tâche d'explorer les fonctions du type $x \to \mathrm{e}^{-kx^n}$ avec $n \geq 2$ et d'autre part, d'ajuster, en jouant avec des constantes additives et multiplicatives, la courbe aux contraintes de l'énoncé. Les recherches sont alors relancées et les résultats des uns alimentent les recherches des autres.

Conclusion

Dans ces deux extraits et ces rapides survols du travail des élèves, je voudrais surtout souligner les conditions permettant cette exploration d'une petite partie des mathématiques. On voit bien que les résultats ici obtenus ne sont pas extraordinaires en regard des programmes des classes concernées, mais ce qui est remarquable c'est le fait que les problèmes ont été posés et résolus par des groupes d'élèves dans une démarche autonome. C'est peut-être ce qui distingue essentiellement cette démarche d'une démarche de travaux pratiques : la « *dévolution* » du problème, c'est-à-dire les conditions mises en place dans la classe pour que le problème ne soit plus le problème du professeur mais le problème des élèves passe dans les deux cas par le partage d'une culture commune dans la classe de mathématiques dans laquelle la recherche de problèmes joue un rôle prépondérant. Mais aussi par la mise en place d'un milieu suffisamment riche et antagoniste pour que les expériences réalisées renvoient d'elles-mêmes des rétroactions permettant de saisir les objets mathématiques. Ainsi, l'expérience concrète de la mesure du rayon de la boule pouvait être vérifiée, contrôlée (et elle l'a été) par la mesure directe utilisant le périmètre de la boule. De la même façon, la calculatrice dans les études des fonctions gaussiennes apportent des confirmations des conjectures émises tout au long des recherches et permet, plus que d'obtenir des résultats, de mettre en confiance dans la justesse d'une piste suivie.

Les allers-retours entre les expériences, que ce soit sur des objets concrets (l'abat-jour des lampadaires du lycée) ou abstraits (les courbes des fonctions gaussiennes), les notions mathématiques sous-jacentes, les simulations effectuées sur machine ou la mise en perspective des modèles mathématiques ont permis de construire les connaissances des objets mathématiques en leur donnant successivement des statuts différents d'outils et d'objets.

Bibliographie

EXPRIME (2010). Aldon, G., Cahuet, P.-Y., Durand-Guerrier, V., Front, M., Krieger, D., Mizony, M. et Tardy, C. *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école*. Cédérom, INRP.

Aldon, G. (1999). Démarche scientifique et calculatrices symboliques, in Guin, D. Trouche, L. (éds.), Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques. *Actes du colloque francophone européen de La Grande-Motte. IREM de Montpellier.*

Aldon, G. (2007). La place des TICE dans une démarche expérimentale en mathématiques, *Actes de l'Université d'été de Saint Flour « Expérimentation et démarches d'investigation en Mathématiques »*.

Aldon, G. (2008). Modéliser, simuler en mathématiques. *Cahiers de l'ingénierie éducative*, 63-64 : 76–77.

Aldon G., Tisseron C. (1998). Des situations pour mettre en œuvre une démarche scientifique au lycée, *Colloque Recherche et Formation, Actes, IUFM de Grenoble*.

Arsac, G. Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*, IREM et CRDP de Lyon.

Brousseau, G. (2004). *Théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage éditions.

Dias T., Durand-Guerrier V. (2005). Expérimenter pour apprendre en mathématiques, *Repères IREM*, 60, p. 61-78.

OCDE (2006). *Evolution of student interest in science and technology studies*, OCDE.

Treiner, J. (2007). Expérimenter en Sciences Physiques : le point de vue d'un théoricien, *Actes de l'Université d'été de Saint Flour « Expérimentation et démarches d'investigation en Mathématiques »*.

Trouche L. (1998). *Expérimenter et prouver, faire des mathématiques avec des calculatrices symboliques, 38 variations sur un thème imposé*. IREM de Montpellier.