Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART
13, rue des Garennes
63800 Cournon d'Auvergne
ou
hochartmax@yahoo.fr

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 492-1

Trouver tous les polynômes complexes P tels que si $|z| = 1$ alors $|\mathrm{P}(z)| = 1$.

Problème 492 - 2 (Question de Michel Lafond)

Soit P et Q deux polynômes réels du second degré. On suppose que les suites $\left(\mathrm{P}(n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\mathrm{Q}(n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement croissantes et sans terme commun. On intercale ces deux suites pour obtenir la suite

$$u = \left(1, 2, 8, 10, 18, 25, 32, 46, \ldots\right).$$

1. Calculer u_{1000}.
2. Donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de u_n.

Problème 492 - 3

Une droite Δ coupe un triangle ABC et le partage en deux polygones de même aire et même périmètre. Montrer que la droite passe par le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 486-3 (Question de Roger Cuculière)

Trouver tous les couples (E, f) où E est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, et f est une fonction définie sur E, non constante, continue en 0, à valeurs réelles, et telle que, si $x, y \in \mathrm{E}$ vérifient $f(x)\,f(y) \neq 1$, alors $x + y \in \mathrm{E}$ et $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$.

Solution de Roger Cuculière (Clichy La Garenne)

Soit (E, f) une telle solution. On note I le plus grand (au sens de l'inclusion) intervalle de E contenant 0.

Lemme 1. *On a* $f(0) = 0$. *Les ensembles* E *et* I *sont ouverts et l'application* f *est continue sur* E.

Preuve.

• On montre d'abord que $f(0) \neq \pm 1$ par l'absurde. Si $f(0) = \varepsilon = \pm 1$, puisque f est non constante, il existe $x_0 \in$ E tel que $f(0)f(x_0) \neq 1$ et donc

$$f(x_0) = f(x_0 + 0) = \frac{f(x_0) + f(0)}{1 - f(x_0)f(0)} = \frac{f(x_0) + \varepsilon}{1 - \varepsilon f(x_0)},$$

ce qui conduit à $f(x_0)^2 = -1$, impossible.

Ainsi, $f(0)^2 \neq 1$, et par suite

$$f(0) = f(0+0) = \frac{2f(0)}{1 - f(0)^2},$$

ce qui implique $f(0) = 0$.

• Comme E est un voisinage de 0, il existe un réel $r > 0$ tel que $[-r, r] \subset \mathrm{E}$. Soit $x_0 \in$ E. En raison de la continuité de f en 0, il existe un réel ρ, avec $0 < \rho \leq r$, tel que $|x| \leq \rho$ implique $x \in \mathrm{E}$ et $|f(x)f(x_0)| < 1$.

Soit un réel h tel que $|h| \leq \rho$. Alors, $h \in \mathrm{E}$ et $|f(x_0)f(h)| < 1$. Donc $x_0 + h \in$ E. Il en résulte $[x_0 - \rho, x_0 + \rho] \subset \mathrm{E}$. Comme ceci est vrai de tout $x_0 \in$ E, il s'ensuit que E est ouvert.

• Soit $x_0 \in$ I, d'où $x_0 \in$ E. On a vu qu'il existe $\rho > 0$ tel que $[x_0 - \rho, x_0 + \rho] \subset \mathrm{E}$.. L'ensemble $\mathrm{J} = \mathrm{I} \cup [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ est un intervalle tel que $0 \in$ J et $\mathrm{J} \subset \mathrm{E}$, d'où $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$, et par suite $[x_0 - \rho, x_0 + \rho] \subset \mathrm{I}$, ce qui prouve que l'intervalle I est ouvert.

• Soit $x_0 \in$ E, et le réel ρ défini ci-dessus. On a vu que si h est un réel tel que $|h| \leq \rho$, alors $h \in \mathrm{E}$ et $|f(x_0)f(h)| < 1$, d'où $x_0 + h \in$ E. De plus,

$$f(x_0 + h) = \frac{f(x_0) + f(h)}{1 - f(x_0)f(h)}.$$

Puisque f est continue en 0, $\lim_{h \to 0} f(h) = f(0) = 0$, d'où $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, ce qui prouve que la fonction f est continue en x_0.

Lemme 2. *Soit* $\mathrm{I}_+ = \mathrm{I} \cap \mathbb{R}_+$. *Il existe* $x \in \mathrm{I}_+$ *tel que* $|f(x)| \geq 1$.

Preuve.

• On commence par montrer que f n'est pas identiquement nulle sur I_+. Par l'absurde, on suppose que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}_+$. Soit toujours $r > 0$ tel que $[-r, r] \subset \mathrm{E}$, d'où $[-r, r] \subset \mathrm{I}$, et $[0, r] \subset \mathrm{I}_+$. On a donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, r]$. Si $x \in [0, r]$, alors $x \in$ E, $-x \in$ E, et $f(x)\, f(-x) = 0 \neq 1$. En conséquence,

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = \frac{f(x) + f(-x)}{1 - f(x)f(-x)} = f(-x).$$

D'où $f(x) = 0$ pour tout $x \in [-r, r]$. Pour $x \in [-r, r]$, $f(x)^2 = 0 \neq 1$, donc $2x$ appartient à E et

$$f(2x) = \frac{2f(x)}{1 - f(x)^2} = 0.$$

Ainsi, $[-2r, 2r] \subset \mathrm{E}$ et f est nulle sur $[-2r, 2r]$. Par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[-2^n r, 2^n r] \subset \mathrm{E}$ et que f est nulle sur $[-2^n r, 2^n r]$. Ainsi, l'ensemble E est égal à $\mathbb{R}$ tout entier, et la fonction f est nulle, ce qui est exclu par hypothèse.

• On montre maintenant l'existence de $x \in \mathrm{I}_+$ tel que $|f(x)| \geq 1$. Par l'absurde, on suppose que $|f(x)| < 1$ pour tout $x \in \mathrm{I}_+$. On a alors, pour tout $x \in \mathrm{I}_+$, $f(x)^2 \neq 1$ donc $2x$ appartient à E. Ainsi, $[0, 2r] \subset \mathrm{I}_+$ et, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $[0, 2^n r] \subset \mathrm{I}_+$, puis $\mathrm{I}_+ = \mathbb{R}_+$. On fixe alors $x \in \mathbb{R}_+$ et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = |f(2^n x)|$. Alors $0 \leq u_n < 1$, et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1 - u_n^2}$.

Cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc convergente, et sa limite L vérifie $\mathrm{L}(1 - \mathrm{L}^2) = 2\mathrm{L}$, soit $\mathrm{L} = 0$, ce qui implique $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en particulier $|f(x)| = u_0 = 0$. On a alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}_+$, ce que contredit le premier point.

Lemme 3. *Il existe un unique réel $a \in \mathrm{I}_+$ tel que $|f(a)| = 1$ et $|f(x)| < 1$ pour $x \in [0, a[$. De plus, $-a \in \mathrm{I}$, $|f(-a)| = 1$, et $|f(x)| < 1$ pour $x \in]-a, 0]$.*

Preuve.

• On montre l'existence de a. Il existe $x \in \mathrm{I}_+$ tel que $|f(x)| \geq 1$. On pose alors

$$a = \inf\{x \in \mathrm{I}_+ \mid |f(x)| \geq 1\}.$$

C'est un élément de I_+. Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I_+ qui converge vers a et telle que $|f(x_n)| \geq 1$. Par continuité de f, $|f(a)| \geq 1$, et par suite $a > 0$. De plus, pour tout $x \in [0, a[$, $x \in \mathrm{I}_+$ et $|f(x)| < 1$, d'où, par continuité de f, $|f(a)| \leq 1$, et finalement $|f(a)| = 1$.

• L'unicité de ce réel a est immédiate, car s'il existait deux tels réels distincts a_1 et a_2, avec $a_1 < a_2$, on devrait avoir à la fois $|f(a_1)| < 1$ et $|f(a_1)| = 1$.

• Pour le reste du lemme, si le couple (E, f) convient, on pose $\mathrm{E}^* = -\mathrm{E}$ et pour $x \in \mathrm{E}^*$, $f^*(x) = f(-x)$. Le couple (E^*, f^*) convient, et l'intervalle I correspondant est

$I^* = -I$. Il existe donc $a^* \in I \cap R_+$ tel que $\left|f^*\left(a^*\right)\right| = 1$ et tel que $\left|f^*(x)\right| < 1$ pour $x \in [0, a^*[$. En posant $b = -a^*$, on a $b \in I$, $b < 0$, $\left|f(b)\right| = 1$, et $|f(x)| < 1$ pour $x \in \,]b, 0]$. Il s'agit de montrer que $b = -a$. Si l'on avait $a + b > 0$, alors $0 < -b < a$, d'où $-b \in I_+$ et $\left|f(-b)\right| < 1$. Par suite, $\left|f(b)f(-b)\right| = \left|f(-b)\right| < 1$, et

$$0 = f(0) = f\big(b + (-b)\big) = \frac{f(b) + f(-b)}{1 + f(b)f(-b)},$$

ce qui implique $f(-b) = -f(b)$, et $\left|f(-b)\right| = \left|f(b)\right| = 1$, contradiction.

Si l'on avait $a + b < 0$, alors $b < -a < 0$, d'où $-a \in I$ et $\left|f(-a)\right| < 1$. Par suite, $\left|f(a)f(-a)\right| = \left|f(-a)\right| < 1$, et

$$0 = f(0) = f\big(a + (-a)\big) = \frac{f(a) + f(-a)}{1 - f(a)f(-a)},$$

ce qui implique $f(-a) = -f(a)$ puis $\left|f(-a)\right| = \left|f(a)\right| = 1$, contradiction.

Finalement, $a + b = 0$, soit $b = -a$.

Lemme 4. *On a* $I =]-2a, 2a[$, *et pour* $x \in I, f(-x) = -f(x)$.

Preuve.

• On montre d'abord l'inclusion $]-2a, 2a[\, \subset I$. Soit $x \in \,]-2a, 2a[$, d'où $\dfrac{x}{2} \in \,]-a, a[$.

Alors, $\dfrac{x}{2} \in I$ et $f\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 < 1$, d'où $x = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2} \in E$. Ceci prouve l'inclusion $]-2a, 2a[\, \subset E$, d'où $]-2a, 2a[\, \subset I$.

• On montre que f est impaire sur $]-2a, 2a[$. D'abord, pour $x \in \,]-a, a[$, $|f(x)| < 1$, $\left|f(-x)\right| < 1$ et alors

$$0 = f(0) = f\big(x + (-x)\big) = \frac{f(x) + f(-x)}{1 - f(x)f(-x)},$$

d'où $f(-x) = -f(x)$. Maintenant, pour $x \in \,]-2a, 2a[$, $\dfrac{x}{2} \in \,]-a, a[$, d'où $\left|f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right| < 1$, $\left|f\left(-\dfrac{x}{2}\right)\right| < 1$, $f\left(-\dfrac{x}{2}\right) = -f\left(\dfrac{x}{2}\right)$. On en déduit que

$$f(x) = \frac{2f\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1 - f\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$$

et

$$f(-x) = \frac{2f\left(-\frac{x}{2}\right)}{1-f\left(-\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{-2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1-f\left(\frac{x}{2}\right)^2} = -f(x).$$

• On montre enfin l'inclusion $\mathrm{I} \subset \left]-2a, 2a\right[$. Puisque I est un invervalle contenant $]-2a, 2a[$, il suffit de montrer que $2a$ et $-2a$ n'appartiennent pas à I. Soit un réel h tel que $0 < h < a$. On a $0 < a - h < a$, d'où $f(a - h)^2 < 1$, et

$$f(2a-2h) = \frac{2f(a-h)}{1-f(a-h)^2}.$$

En conséquence, si $f(a) = 1$, alors $\lim\limits_{h\to 0,\, h>0} f(2a-2h) = +\infty$. Et si $f(a) = -1$, alors $\lim\limits_{h\to 0,\, h>0} f(2a-2h) = -\infty$. Dans les deux cas, $2a$ n'appartient pas à I car f est continue sur I. On prouve de même que $-2a \notin \mathrm{I}$.

Lemme 5. *Pour* $x \in\ ]0, 2a[$, $f(x) \neq 0$ et $f(2a-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

Preuve. Si $x \in\ ]0, 2a[$, alors $2a - x \in\ ]0, 2a[$, d'où $x \in \mathrm{E}$ et $2a - x \in \mathrm{E}$. Si l'on avait $f(x)f(2a - x) \neq 1$, alors $2a = x + (2a - x) \in \mathrm{E}$, ce qui n'est pas. On en déduit $f(x)f(2a - x) = 1$, soit $f(x) \neq 0$ et $f(2a-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

Lemme 6. *Les réels* $4a$ *et* $-4a$ *appartiennent à* E *et* $f(4a) = f(-4a) = 0$. *De plus,*

$$\mathrm{E} = \mathbb{R} \setminus (2a + 4a\mathbb{Z}) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-2a+4ka, 2a+4ka\right[.$$

Enfin, la fonction f est périodique, de période $4a$.

Preuve.

• On a $0 < \left|f\left(\frac{a}{2}\right)\right| < 1$. D'où $\left|f\left(\frac{3a}{2}\right)\right| = \left|f\left(2a-\frac{a}{2}\right)\right| = \dfrac{1}{\left|f\left(\frac{a}{2}\right)\right|} > 1.$

En conséquence $3a = \dfrac{3a}{2} + \dfrac{3a}{2}$ appartient à E, et

$$f(3a) = \frac{2f\left(\frac{3a}{2}\right)}{1-f\left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{\dfrac{2}{f\left(\frac{a}{2}\right)}}{1-\dfrac{1}{f\left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{2f\left(\frac{a}{2}\right)}{f\left(\frac{a}{2}\right)^2-1} = -f(a).$$

Il en résulte $f(3a)f(a) = -f(a)^2 \neq 1$, d'où $4a = 3a + a$ appartient à E, et

$$f(4a) = f(3a+a) = \frac{f(3a)+f(a)}{1-f(3a)f(a)} = 0.$$

On a de même $-\frac{3a}{2} \in \mathrm{I}$, $f\left(-\frac{3a}{2}\right) = -f\left(\frac{3a}{2}\right)$, $\left|f\left(-\frac{3a}{2}\right)\right| > 1$, $-3a \in$ E, $f(-3a)$ $= -f(3a)$, $-4a \in$ E, et enfin $f(-4a) = 0$.

• Pour le second point, si $x \in$ E, alors $f(x)f(4a) = f(x)f(-4a) = 0$, d'où $x + 4a \in$ E et $x - 4a \in$ E, et par suite

$$\mathrm{E} = \mathbb{R} \setminus (2a + 4a\mathbb{Z}) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-2a + 4ka, 2a + 4ka[.$$

• Pour finir, pour $x \in$ E, $f(x + 4a) = f(x - 4a) = f(x)$.

Lemme 7. *Soit φ l'application définie sur* E *par* $\varphi(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{4a}\right)$.

1\. *Pour* $x \in]-2a, 2a[$, *si* $f(x) = \varphi(x)$, *alors* $f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right)$.

2\. *Pour* $x, y \in]-2a, 2a[$, *si* $f(x) = \varphi(x)$ *et si* $f(y) = \varphi(y)$, *alors*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

3\. *On suppose* $f(a) = 1$. *Pour* $n \in \mathbb{N}$, $k \in [[0, 2n]]$, alors

$$f\left(\frac{k}{2^n}a\right) = \varphi\left(\frac{k}{2^n}a\right).$$

Preuve.

• Pour le premier point, on remarque que la fonction φ admet E pour ensemble de définition et satisfait à l'équation fonctionnelle proposée. Si $x \in]-2a, 2a[$, alors $\left|\frac{x}{2}\right| < a$, d'où $\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right| < 1$, et par ailleurs $\left|\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right| < 1$. On a donc

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1-f\left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

Et aussi

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \frac{2\varphi\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\varphi\left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

L'hypothèse $f(x) = \varphi(x)$ se traduit par

$$\frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1-f\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{2\varphi\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\varphi\left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

On note $u = f\left(\frac{x}{2}\right)$, $v = \varphi\left(\frac{x}{2}\right)$, qui sont tels que $|u| < 1$, $|v| < 1$. Il vient

$$0 = \frac{u}{1-u^2} - \frac{v}{1-v^2} = \frac{(u-v)(1+uv)}{\left(1-u^2\right)\left(1-v^2\right)}.$$

On en conclut $u = v$, soit $f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right)$.

• Pour le deuxième point, soit $x, y \in \,]-2a, 2a[$. Alors

$$\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right| < 1, \left|f\left(\frac{y}{2}\right)\right| < 1, \left|\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right| < 1, \left|\varphi\left(\frac{y}{2}\right)\right| < 1.$$

Si de plus $f(x) = \varphi(x)$ et $f(y) = \varphi(y)$, on a

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right), f\left(\frac{y}{2}\right) = \varphi\left(\frac{y}{2}\right),$$

et par suite

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{y}{2}\right)}{1-f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{y}{2}\right)} = \frac{\varphi\left(\frac{x}{2}\right)+\varphi\left(\frac{y}{2}\right)}{1-\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{y}{2}\right)} = \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

• Le troisième point se démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Cette assertion est vraie pour $n = 0$. Si elle est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$, soit $k \in [[0, 2^{n+1}]]$.

Si k est pair, alors $k = 2h$, $h \in \mathbb{N}$, $0 \leq h \leq 2^n$, et par suite

$$f\left(\frac{k}{2^{n+1}}a\right) = f\left(\frac{h}{2^n}a\right) = \varphi\left(\frac{h}{2^n}a\right) = \varphi\left(\frac{k}{2^{n+1}}a\right).$$

Si k est impair, alors $k = 2h + 1$, $h \in \mathbb{N}$, $0 \leq h < 2^n$, et, d'après le point précédent,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{k}{2^{n+1}}a\right) &= f\left(\frac{2h+1}{2^{n+1}}a\right) = f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2^n}a+\frac{h+1}{2^n}a\right)\right) \\ &= \varphi\left(\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2^n}a+\frac{h+1}{2^n}a\right)\right) = \varphi\left(\frac{2h+1}{2^{n+1}}a\right) = \varphi\left(\frac{k}{2^{n+1}}a\right). \end{aligned}$$

On est maintenant en mesure de conclure.

Théorème.

Les couples (E, *f*) *répondant à la question sont exactement, pour* $m \in \mathbb{R}^*$,

$$E = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2|m|} + \frac{k\pi}{|m|}, \frac{\pi}{2|m|} + \frac{k\pi}{|m|} \right[, \ f : x \mapsto \tan(mx).$$

Preuve.

• Le réel a est défini au lemme 3. On a donc $f(a) = \pm 1$.

• On suppose d'abord $f(a) = 1$. On pose

$$\varphi(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{4a}\right),$$

et

$$F = \left\{ \frac{k}{2^n} a \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, k \in [\![0, 2^n]\!] \right\}.$$

D'après le lemme 7, pour tout $x \in$ F, on a $f(x) = \varphi(x)$. L'ensemble F est dense dans le segment $[0, a]$. Les fonctions f et φ étant continues sur $[0, a]$, on en déduit l'égalité $f(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in [0, a]$. Il résulte du lemme 5 que $f(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in [0, 2a[$, puis du lemme 4 que $f(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in]-2a, 2a[$ et enfin, du lemme 6, que $f(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in$ E. En posant $m = \frac{\pi}{4a}$, on trouve le résultat annoncé.

• On suppose maintenant que $f(a) = -1$. On observe alors que le couple (E, $-f$) convient. Dans ce cas, on a $-f(a) = 1$, d'où $-f(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in$ E, soit $f(x) = -\varphi(x)$ pour tout $x \in$ E. En posant $m = -\frac{\pi}{4a}$, on trouve encore le résultat annoncé.

Commentaires. Roger Cuculière précise que cet énoncé lui a été communiqué en 2005 par **Jean-Paul Petit**, alors professeur en classe de Mathématiques Supérieures au lycée Malherbe de Caen. Lui même avait eu à traiter ce problème en 1966, quand il était élève de **M. Gounon**, en Mathématiques Supérieures, au lycée Faidherbe de Lille.

Autres réponses. Pour ce problème, me sont parvenues deux autres réponses, celle de **Marie-Laure Chaillout (Épinay sur Orge)** et celle de **Pierre Renfer (Saint George d'Orques)**.