Exercices de ci, de là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

Jean Fromentin
17 rue de la Roussille
79000 NIORT

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Alors que l'association attaque gaillardement son second siècle, un collègue chilien me fait parvenir une solution du 487-2 produite par un élève de son lycée. Il s'agit de l'Institut national du Chili (à Santiago), dont a été célébré en août dernier le 197^{e} anniversaire… Le bicentenaire est proche !
Merci donc à Orlando R Ceballos Macedo pour son envoi et sa lecture assidue du BV.

Exercices

Exercice 492-1 Guerre froide[1] (d'après les olympiades mathématiques de l'Union Soviétique 1965)

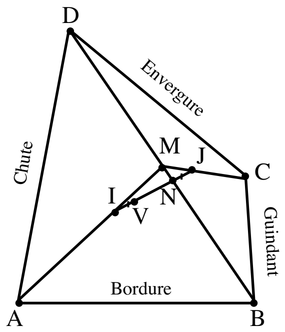
Un avion espion vole à la vitesse de 1000 km/h en décrivant un cercle de centre O et de rayon 10 km. On tire un missile depuis O. Il va à la même vitesse que l'avion et sa trajectoire est telle qu'il reste toujours aligné entre O et l'avion.
Au bout de combien de temps atteint-il l'avion ?

Exercice 492-2 Jean-Yves Le Cadre – Saint Avé (issu du cours de navigation des Glénans)

Une voile aurique est assimilée à une plaque homogène ayant la forme indiquée. La construction du centre d'inertie d'une telle voile est indiquée ci-dessous et codée sur la figure.
La question, bien sûr, est de savoir si cette construction est exacte ou approximative.

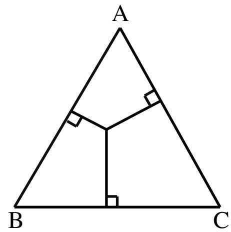
(1) Ah… ; ils savaient habiller les problèmes en ce temps-là !

Comment déterminer le centre d’une voile ABCD ? :
– Tracer une diagonale, ici BD.
– Placer le point M au milieu de BD.
– Placer I au tiers de MA, J au tiers de MC.
– Tracer IJ.
– N est l’intersection de IJ et BD.
– Le centre de voilure est le point V tel que IV = NJ.



Exercice 492-3 Probabilités

On choisit au hasard un point M à l’intérieur d’un triangle équilatéral et on construit ses projetés orthogonaux sur les côtés.
1) Quelle est la probabilité que les trois longueurs obtenues puissent être celles d’un triangle ?
2) Pour effectuer une simulation sur ordinateur, on se place dans un repère orthonormal dans lequel les coordonnées sont B (0;0), C (2;0) et A $\left(1;\sqrt{3}\right)$. Le choix du point intérieur est alors effectué de la manière suivante : abscisse quelconque choisie entre 0 et 2 ; ordonnée choisie quelconque mais de façon à demeurer dans le triangle.



Voici ci-dessous les formules qui ont été écrites dans les cases A2 à F2.

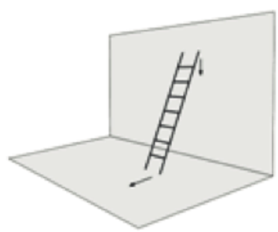
	A	B	C	D
1	x_0	y_0	l_0	l_1
2	=ALEA()*2	=SI(A2<1;RACINE(3)*A2*ALEA();(-RACINE(3)*A2+2*RACINE(3))*ALEA())	=B2	=0,5*ABS(RACINE(3)*A2+B2-2*RACINE(3))

	suite de ces 2 lignes	D	E	F
1		l_1	l_2	compter 1 si triangle, 0 sinon
2		=0,5*ABS(RACINE(3)*A2+B2-2*RACINE(3))	=0,5*ABS(RACINE(3)*A2-B2)	=SI(ET(ABS(C2-D2)<E2;E2<C2+D2);1;0)

Cette modélisation n’est pas correcte et conduit en dix fois 10 000 essais sur tableur, à une moyenne d’environ 0,153 …
→ Calculer la valeur théorique correspondant à cette simulation.

Exercice 492-4 Chute d’échelle

Une échelle de 5 m de long est en train de tomber par terre. Le haut glisse le long du mur vertical, le bas sur le sol horizontal. Si le pied glisse à la vitesse régulière de 18 cm/s, quelle est la vitesse du sommet de l’échelle quand celui-ci est à 3 m du sol ?



Solutions

Exercice 489-1 Espace (d’après les olympiades mathématiques d’Israël 1995)
Quatre points non coplanaires étant donnés, on appelle « équiplan » tout plan équidistant de chacun de ces quatre points.

Combien y a-t-il d'équiplans ?

Solution de Georges Lion (Wallis)

Les quatre points ne peuvent pas être tous d'un même côté d'un équiplan, d'où deux cas :
a) Il y a un point d'un côté et les trois autres de l'autre côté. Appelant A le point « solitaire » et H son projeté orthogonal sur le plan des autres points, l'équiplan est nécessairement le plan médiateur de [AH]. D'où quatre possibilités.
b) Il y a deux points de chaque côté de l'équiplan. Les appelant respectivement {A;B} et {C;D} et notant Δ la perpendiculaire commune aux deux droites (non coplanaires) (AB) et (CD) en P et Q, l'équiplan étudié est nécessairement le plan médiateur de [PQ]. D'où trois nouvelles possibilités.
La réponse est donc dans tous les cas : sept équiplans.

Autres solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Bernard Collignon (Coursan), Jean-Yves Le Cadre (Saint Avé).

Nota.
Bernard Collignon remarque que l'on peut s'intéresser au même problème en dimension 1 (droite) et 2 (plan).
* *en dimension* $n = 1$: on se place sur une droite et on considère deux points distincts. L'ensemble des points situés à égale distance de deux points distincts A et B de la droite est l'unique point I milieu de [AB].
* *en dimension* $n = 2$: on se place dans le plan et on considère trois points non alignés.
L'ensemble des droites « équidistantes » de trois points A, B, C non alignés est constitué des N = 3 droites (IJ), (IK) et (JK) où I, J et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [AC] et [BC].

Exercice 489-2 Une suite de carrés (d'après la compétition mathématique de Slovénie 1998)

Prouver que chaque nombre de la suite 49 ; 4 489 ; 444 889 ; 44 448 889 ; … est un carré parfait (dans chaque nombre, il y a n quatre, $n - 1$ huit et un neuf).

Solution de Guy Brusco (La Garde)

Soit le nombre N = 44….4 88…89 dans lequel il y a n quatre, $n - 1$ huit et un neuf.
$N = 4A \times 10^n + 8A + 1$ avec A = 11…1 où A s'écrit avec n fois le nombre 1.
$N = 4A\,[10^n + 2] + 1$.
Or $10^n = 9A + 1$, c'est donc que $N = 4A\,[9A + 1 + 2] + 1$.
Soit encore $N = 36\,A^2 + 12\,A + 1 = (6A + 1)^2$, ce qui est bien un carré parfait.

Autres solutions : Jean Gounon (Chardonnay), Robert Bourdon (Tourgeville), Jean-Claude Carréga (Lyon), Alain Corre (Moulins), Michel Sarrouy (Mende), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Bernard Collignon (Coursan), Jacques Chayé (Poitiers), Jean-Yves Le Cadre (Saint Avé).

Nota.
Avec leur solution, Robert Bourdon et Michel Sarrouy proposent chacun une sorte de narration de recherche : compléments instructifs que vous pourrez trouver sur le site, dans les suppléments en ligne au BV.

Exercice 489-3 Gabriel Lamé – Paris

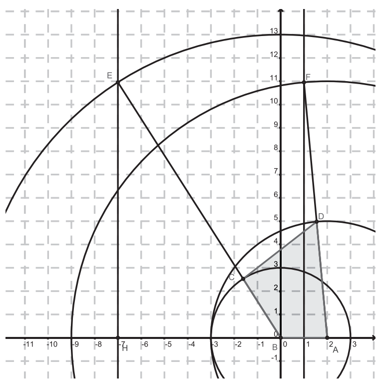
ABCD est un quadrilatère non croisé inscriptible dans un cercle dont les côtés [AB], [BC], [CD] et [DA] mesurent respectivement 2cm, 3 cm, 4 cm et 5 cm.
Proposer une construction de ABCD.

Solution de Pierre Lapôtre (Calais) : avec le théorème d'Al-Kashi

En nommant α et β des mesures respectives des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ et en observant que les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ d'une part et $\widehat{B}$ et $\widehat{D}$ d'autre part sont supplémentaires, on obtient, en appliquant le théorème d'Al-Kashi dans les triangles ABC, ADC puis dans les triangles ABD, BDC que :

$\cos\alpha = -\dfrac{7}{13}$ et $\cos\beta = \dfrac{1}{11}$.

Ainsi, sur un axe gradué en cm, on place les points A, B et H d'abscisses respectives 2, 0 et –7.
On trace la perpendiculaire δ en H à d.
L'un des points d'intersection de δ avec le cercle de centre B de rayon 13 cm se nomme E.
Sur le segment [EB], on place le point C tel que BC = 3cm.
La médiatrice δ' de [AB] coupe le cercle de centre A, de rayon 11 cm en F, F étant situé dans le demi-plan de frontière d contenant E.
D est le point du segment [AF] tel que AD = 5cm.



Le quadrilatère ABCD est alors construit.

Une vérification peut être effectuée en mesurant CD, puis en traçant la médiatrice de [CD] et en nommant I son point d'intersection avec la médiatrice de [AB] : constatez que le cercle de centre I passant par A est bien circonscrit au quadrilatère ABCD.

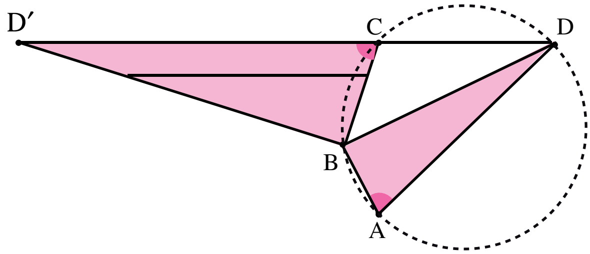
Solution de Jean-Yves Le Cadre (Saint Avé) : avec une similitude

Principe de construction (les longueurs ne sont pas respectées) :
ABCD est le quadrilatère inscriptible de côtés donnés(2). La similitude directe S de centre B, d'angle $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$ et de rapport $k = \dfrac{BC}{BA}$ transforme A en C et D en D′ tel

(2) Comme pour le triangle, dans le cas général, l'existence est soumise à des conditions de distance.

que $CD' = k \cdot AD$ et $\left(\overrightarrow{CD'}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right)$.

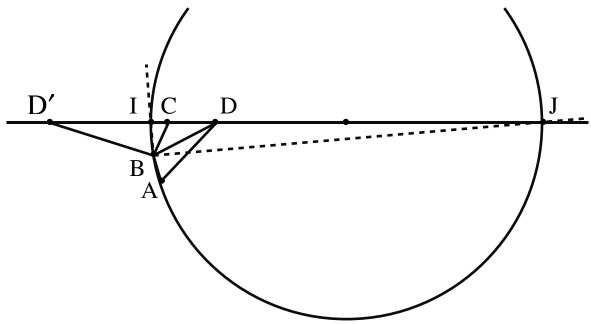
ABCD n'étant pas croisé, $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right)$, donc $\left(\overrightarrow{CD'}, \overrightarrow{CB}\right)$ est le supplémentaire de $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}\right)$. Donc $C \in [DD']$.



Soient I et J les points d'intersection des bissectrices intérieure et extérieure de $\widehat{DBD'}$ avec la droite (DD′). On a alors

$$\frac{ID'}{ID} = \frac{JD'}{JD} = \frac{BD'}{BD} = k.$$

Or, l'ensemble des points M tels que $\dfrac{MA}{MB} = k$ est le cercle de diamètre IJ.



Par suite :

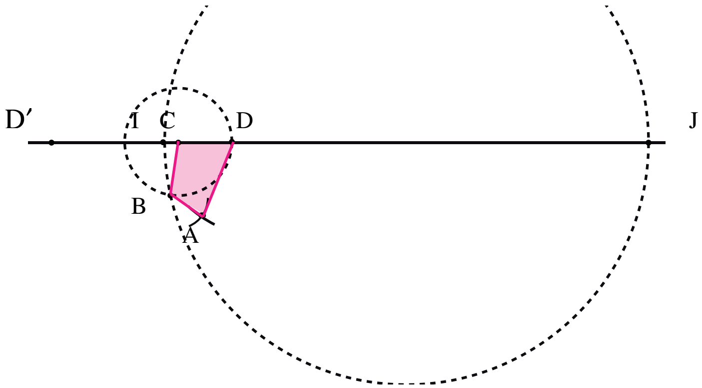
1) On trace [CD].

2) On construit D′, image de D par S.

3) On construit I et J.

4) CB étant donné, B est alors l'un des points d'intersection du cercle de rayon donné BC et du cercle de diamètre [IJ].

5) La construction de A est alors classique sachant que ABCD est convexe.



Remarque.
Dans sa solution, Jean-Yves Le Cadre cite en référence le livre : Géométrie du plan (éd. Vuibert « Les sciences en fac » de Georges Lion, p. 129-1)).

Solution de Éric Oswald (Borgo) : avec une inversion

Supposons un tel quadrilatère ABCD inscrit dans le cercle (c). Si (BC) était parallèle à (AD), ABCD serait un trapèze isocèle et on aurait AB = CD contrairement à l'hypothèse. Les droites (AD) et (BC) se coupent donc en un point O, extérieur à (c) car ABCD est non croisé. Considérons l'inversion i, de pôle O et de puissance k égale à la puissance du point O par rapport au cercle (c). Elle laisse (c) globalement invariant et échange A et D d'une part, B et C d'autre part.
Soient A′ = i(A) et B′ = i(B). Alors

$$\mathrm{A'B'} = k \cdot \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB}} = \mathrm{OB} \cdot \mathrm{OC} \cdot \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OC} \cdot \mathrm{AB}}{\mathrm{OA}}$$

donc

$$\frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}}$$

et comme A′B′ = DC, il vient

$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}} = \frac{4}{2} = 2.$$

Donc OC = 2 OA.
On a de même

$$\mathrm{A'B'} = \mathrm{OA} \cdot \mathrm{OD} \cdot \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OD} \cdot \mathrm{AB}}{\mathrm{OB}},$$

donc

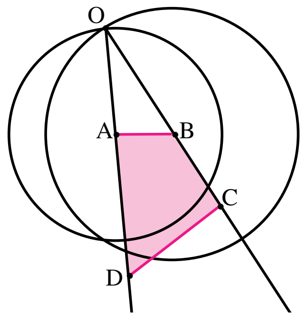
$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}} = 2.$$

Finalement OC = 2 OA et OD = 2 OB.

Premier cas : O et (AB) se trouvent de part et d'autre de (CD) et alors C appartient à [OB] et D appartient à [OA].

Posant x = OA, on a OC = $2x$ et comme OB = OC + CB = OC + 3, on a : OB = $2x + 3$.
OA = OD + DA, donc OD = OA − DA = $x - 5$.
OC · OB = OD · OA conduit à $2x\ (2x + 3) = (x - 5)\ x$ avec x non nul, donc $2\ (2x + 3) = x - 5$ et ainsi OA = −11/3.
Il n'y a donc pas de solution de ce type car OA est strictement positif : le résultat était prévisible intuitivement.

Deuxième cas : O et (CD) se trouvent de part et d'autre de (AB) et alors B appartient à [OC] et A appartient à [OD].
Dans ce cas OC = OB + BC donc OB = OC − BC = $2x - 3$, OD = OA + AD = $x + 5$.
La relation devient : $(2x - 3)\ 2x = x\ (x + 5)$ et $4x - 6 = x + 5$, ce qui conduit à OA = 11/3.
On a donc une solution telle que :
– O, A, D sont alignés dans cet ordre avec OA = 11/3 et OD = 26/3.
– O, B, C sont alignés dans cet ordre avec OB = 13/3 et OC = 22/3.
On peut alors construire le triangle OAB car $2 < 11/3 + 13/3 = 8$, $11/3 < 2 + 13/3$ et $13/3 < 2 + 11/3$:



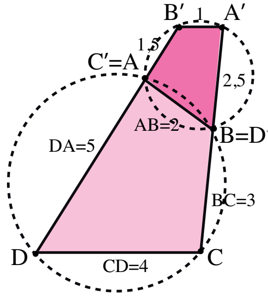
Tracer un segment [AB] de longueur 2, puis tracer les cercles de centres A et B de rayons respectifs 11/3 et 13/3 ; choisir le point O à l'intersection de ces cercles. Porter sur la droite (OA) un segment [AD] de longueur 5 dans le prolongement de [OA] et sur la droite (OB) un segment [BC] de longueur 3 dans le prolongement de [OB].

Le quadrilatère ABCD obtenu est tel que AB = 2, BC = 3, AD = 5 et comme OA · OD = OB · OC il est inscriptible.
De plus

$$\mathrm{CD} = \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OD}\cdot\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OD}\cdot\mathrm{AB}}{\mathrm{OB}} = \frac{2\mathrm{OD}}{\mathrm{OB}} = 4.$$

Donc ABCD répond à la question

Solution de Gabriel Lamé (Paris) : configuration



Les quadrilatères ABCD et A′B′C′D′ (ou A′B′AB) sont semblables.
Puisqu'ils sont inscriptibles, [A′B′] est parallèle à [DC].
Il suffit donc de construire le trapèze A′B′DC dont les longueurs des côtés sont connues.

Nota.
Gabriel Lamé (1795-1870) est un mathématicien français auteur en 1818, alors qu'il est élève ingénieur au corps royal des mines, d'un ouvrage intitulé *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*,

disponible sur Gallica ou Google books. C'est au sujet de la construction d'un cercle assujetti à passer par deux points donnés et à couper une droite sous un segment capable d'angle connu, que cette configuration apparait. On constate alors qu'elle sert également à répondre au problème posé ici (pages 18 à 21).

Autres Solutions : Alain Corre (Moulins), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Georges Lion (Wallis), Bernard Collignon (Coursan).

Exercice 489-4 Complexe (d'après les XXXIII^es^ olympiades mathématiques espagnoles)

Montrer que tout nombre complexe non nul peut s'exprimer comme somme de deux nombres complexes dont la différence et le quotient sont des imaginaires purs.

Solution de Alain Corre (Moulins)

– Soit $x + y\mathrm{i}$ la forme algébrique du nombre complexe z, et soit A le point du plan complexe d'affixe z.

– Soit $\alpha + \beta\mathrm{i}$ la forme algébrique du nombre complexe u_1, et soit $\overrightarrow{v_1}$ le vecteur du plan complexe d'affixe u_1.

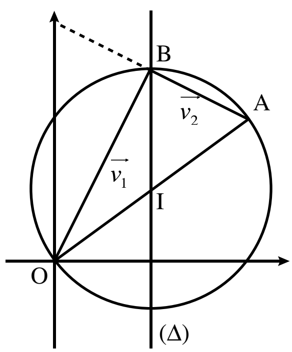
– Soit $\alpha' + \beta'\mathrm{i}$ la forme algébrique du nombre complexe u_2, et soit $\overrightarrow{v_2}$ le vecteur du plan complexe d'affixe u_2.

Sachant que $u_1 + u_2 = z$ et que $u_1 - u_2$ est un imaginaire pur, on a : $\alpha = \alpha' = \dfrac{x}{2}$.

Appelons (Δ) la droite du plan complexe d'équation $\mathrm{X} = \dfrac{x}{2}$ et B le point du plan complexe tel que $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{v_1}$. Le point B appartient à (Δ).

La condition $\dfrac{u_1}{u_2}$ est un imaginaire pur entraîne que la différence des arguments de u_1 et u_2 vaut $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π.

Les vecteurs $\overrightarrow{v_1}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$ et $\overrightarrow{v_2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$ sont donc orthogonaux. Donc B appartient à l'intersection de (Δ) et du cercle de diamètre [OA].



On a donc : $u_1 = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2}\mathrm{i} + \dfrac{|z|}{2}\mathrm{i}$; $u_2 = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2}\mathrm{i} - \dfrac{|z|}{2}\mathrm{i}$.

Autres solutions : Jean Gounon (Chardonnay), Jean-Claude Carréga (Lyon), Alain Corre (Moulins), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Jacques Chayé (Poitiers), Georges Lion (Wallis), Jean-Yves Le Cadre (Saint Avé), Pierre Lapôtre (Calais).