Un scénario pour motiver l'introduction de la fonction exponentielle en terminale S, mise en œuvre dans la classe

Nicolas Magnin(*) & Marc Rogalski(**)

Introduction

Les programmes de 2002 ont fortement recommandé d'introduire la fonction exponentielle via son équation différentielle, dans le but de faire le lien avec l'utilisation de cette fonction dans le programme des sciences physiques, chimiques et biologiques de la terminale S. Ce changement par rapport aux programmes antérieurs, qui l'introduisaient comme fonction réciproque du logarithme, a, à l'époque, soulevé beaucoup de discussions chez les enseignants du second degré (voir [4]), et de fortes polémiques chez ceux du supérieur. Pour ceux qui ont choisi de se conformer à cette recommandation, l'arbitraire de l'introduction de cette équation différentielle, faute de lien véritablement motivé avec la physique, soulève un certain malaise. Nous nous proposons ici de discuter comment une telle motivation pourrait être développée dans le cours de mathématiques.

I. Difficultés de certains choix des programmes, autre possibilité de présentation

I.1. Ce que préconisent les programmes et les documents d'accompagnement

Les programmes en vigueur préconisent, pour la fonction exponentielle, de développer les liens avec la physique, où elle est fondamentale pour l'étude des phénomènes évolutifs du programme : mécanique, électricité, radioactivité. Les instructions suggèrent, dans le but que cette fonction soit très tôt disponible pour son usage en physique, qu'elle soit introduite précocement dans le cours de mathématiques.

De surcroît, les documents d'accompagnement (voir [1]) encouragent une introduction de la fonction exponentielle motivée par l'équation différentielle de la radioactivité, censée être introduite par une expérimentation sur la radioactivité du radon présent dans le sol.

(*) Professeur au lycée Louis Pasteur de Besançon.
(**) Professeur émérite à l'Université des Sciences et Technologies de Lille (laboratoire Paul Painlevé) et collaborateur de l'Université Pierre et Marie Curie (Institut Mathématique de Jussieu).

I.2. Difficultés et obstacles pour cette approche

Nous voyons plusieurs obstacles notables au respect de ces conditions.

1/ La complexité du phénomène de la radioactivité, qui se voit facilement en lisant le document d'accompagnement des programmes sur ce sujet (voir [1] et le texte de A. Warusfel [9]), paraît démesurée pour introduire une fonction somme toute assez simple, bien que fondamentale dans les deux disciplines. Elle est donc difficile à faire en début du programme de physique.

2/ L'équation différentielle mise en évidence par l'expérimentation avec le radon n'est pas celle annoncée : c'est $y'' = -ky'$, car ce que met en évidence cette expérimentation, c'est « l'activité de radioactivité », c'est-à-dire la dérivée y' de la fonction y où $y(t)$ désigne le nombre d'atomes de carbone 14 à l'instant t (voir le texte de J.-P. Ferrier [2]).

3/ La modélisation « continue » correspondante est loin d'être facile à justifier, s'agissant d'un phénomène discret et probabiliste (voir [1] et [7]). Du coup, nonobstant les recommandations, la modélisation est parachutée dans la plupart des manuels de physique comme de mathématiques.

4/ La liaison effective et la coordination entre programmes et enseignants de mathématiques et de physique sont rarement réalisées dans les faits (voir par exemple le travail de F. Malonga [5]).

I.3. Un autre choix possible, objectifs

Bien entendu, du seul point de vue mathématique, bien des méthodes pour motiver l'introduction de la fonction exponentielle existent (voir le texte de J.-P. Friedelmeyer [4]). Citons par exemple :

(1) la recherche d'une fonction dérivable traduisant l'évolution d'une grandeur dont le taux d'accroissement lui est proportionnel, c'est-à-dire par l'équation différentielle $y' = ky$ (c'est ce que souhaitent les programmes de 2002, sans l'imposer) ;

(2) la recherche d'une fonction continue transformant les sommes en produits, c'est-à-dire l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$;

(3) la recherche d'une fonction continue prolongeant l'application $r \to a^r$ définie sur les rationnels ;

(4) la recherche d'une fonction continue dont le *facteur d'accroissement* entre x et $x + h$ soit indépendant de x $\left(\text{c'est-à-dire } \dfrac{f(x+h)}{f(x)} = g(h)\right)$;

(5) la recherche d'une fonction continue dont le *taux d'accroissement relatif* entre x et $x + h$ soit indépendant de x $\left(\text{c'est-à-dire } \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h\,f(x)} = g(h)\right)$;

(6) la recherche de la fonction réciproque de la fonction logarithme (programmes d'avant 2002).

Chacune de ces introductions a des avantages et des inconvénients ; d'ailleurs, assez souvent (sauf pour les présentations (3) et (6)), la preuve d'existence consiste à se ramener à la présentation (1). Donc, et compte tenu de son importance en physique, *nous convenons ici de choisir la première présentation*, comme les concepteurs des programmes de 2002 le souhaitaient.

Quels objectifs peut-on alors se fixer pour le choix d'une motivation, pour les élèves, de la présentation (1) ? Nous en dégageons quelques uns dans ce qui suit.

(a) Nous nous proposons de maintenir une motivation physique, mais par l'intermédiaire d'un phénomène d'évolution bien plus simple que la radio-activité, ne mobilisant aucune connaissance physique préalable du programme de terminale S (et même d'avant !).

(b) Nous voulons lier l'approche par discrétisation et l'approche continue, anticipant sur la méthode d'Euler, qui sera introduite ici par une discrétisation *physique* naturelle, spontanée chez les élèves.

(c) Nous pensons qu'il faut donner le plus possible l'initiative aux élèves notamment en ce qui concerne l'activité de modélisation, afin qu'ils voient bien le lien avec la physique et le saut épistémologique de la physique à une modélisation par les mathématiques.

(d) Nous souhaitons mettre en évidence le rôle des « expériences de pensée » dans l'activité de modélisation en physique.

(e) Nous voulons que les élèves dégagent une motivation physique aux deux approximations de $\exp(x)$, par les suites $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ et $\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n}$. En effet, dans la preuve d'existence proposée en [1], ces deux suites sont « parachutées ».

(f) Nous voulons **donner du sens** à l'introduction de la fonction exponentielle : elle n'est pas gratuite, mais rendue nécessaire pour résoudre un problème qui conduit à rechercher des fonctions proportionnelles à leur dérivée.

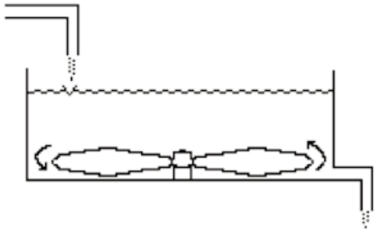
Un objectif plus lointain, sans doute plus important, mais dont la réalisation demanderait un travail en étroite collaboration entre l'enseignant de physique et celui de mathématiques, pourrait être de greffer sur l'activité que nous proposons ici un scénario commun plus vaste. Un tel scénario aurait pour but de dégager, à travers l'étude de plusieurs problèmes de modélisation, la méthode de l'accroissement différentiel. Nous y voyons deux objectifs. D'abord théoriser l'évolution d'un phénomène physique par une équation différentielle, du côté de la physique. Ensuite, faire mieux comprendre, du côté mathématique, la notion de dérivée comme approximation locale affine, en interprétant le terme « négligeable » en terme d'erreur relative.

Pour une première description de ce que pourrait être un tel scénario, on peut consulter [8]. Pour l'intervention de la notion de primitive et de l'intégrale comme moyen de mesurer des grandeurs dans un tel scénario, voir [7].

II. La proposition de scénario, les prévisions (ou « analyse a priori »)

II.1. Présentation aux élèves d’un dispositif physique à étudier : la dilution d’une solution saline

Un bassin contient 100 litres d'eau salée, dans lesquels sont dissous 10 kg de sel. Une arrivée d'eau pure, avec un débit de 10 litres/mn, démarre à l'instant 0. En même temps que l'arrivée d'eau pure, une évacuation du mélange contenu dans le bassin est assurée avec un débit de 10 litres/mn. L'homogénéisation du contenu du bassin est assurée de façon permanente et instantanée par un mélangeur. Au bout d'une heure, quelle quantité de sel reste-t-il dans le bassin ?



II.2. Les paramètres (ou « variables didactiques ») de la situation proposée

Remarquons d’abord qu’il n’y a aucune théorie physique préalable à maîtriser par les élèves, il n’y a même aucune « loi » physique, aucune « formule » à appliquer d’emblée : ils devront se débrouiller seuls, dans une situation immédiatement compréhensible du point de vue phénoménologique (à comparer à la complexité préalable des notions qui interviennent dans la radioactivité), mais sans indication ni contexte.

L’hypothèse que nous faisons, et qui a été testée sur de nombreux publics à qui on avait antérieurement présenté cette situation (étudiants de première année d’université, moniteurs de l’enseignement supérieur, collègues universitaires physiciens), est que l’absence de théorie physique préalable et le choix des variables de la situation (débit de 10 litres à la minute, durée totale d’une heure = 60 minutes) vont irrésistiblement amener les élèves à discrétiser le phénomène physique.

II.3. La procédure de discrétisation

La réaction spontanée des élèves va donc être de raisonner par étapes d'une minute. Mais comment surmonter le caractère toujours variable de la concentration en sel de la solution ?

Les élèves vont donc procéder par étapes d'une minute, pendant laquelle ils supposent, en général implicitement, soit *la quantité de sel* constante, soit *la concentration en sel* constante. On peut prévoir (et le travail en petits groupes est essentiel pour voir surgir ce phénomène) que pour justifier ce fait ils vont imaginer deux expériences de pensée (EP pour abréger). Dans la première (EP1), ils arrêtent le robinet d'eau pure au début de la minute, laissent couler le robinet de vidange pendant une minute (*la concentration en sel est alors constante* pendant cette minute), puis *complètent de façon instantanée* avec 10 l d'eau pure. Dans la seconde (EP2), ils font l'inverse : arrêt de la vidange pendant une minute (pendant laquelle *la quantité de sel est constante*), puis *vidange instantanée*.

Il est facile de voir (en réinvestissant les suites géométriques de première) que EP1 débouche sur le résultat final pour le sel restant : $S(60) = 10 \times (0{,}9)^{60} = 0{,}01797\ldots$, alors que EP2 débouche sur $S(60) = 10 \times \left(\frac{10}{11}\right)^{60} = 0{,}03284\ldots$, ce dernier résultat étant presque le double du premier (voir en annexe 1 le détail de cette modélisation). La discordance entre les deux résultats et le sentiment des élèves que le phénomène est continu et non discret (on peut d'ailleurs leur demander de prévoir un tracé qualitatif du graphe de la fonction $t \to S(t)$ donnant la quantité de sel à l'instant t) vont les amener à diminuer l'intervalle de temps de la discrétisation, le choix de la seconde étant probable, compte tenu des paramètres choisis. On obtient alors 0,02466… et 0,02491… : l'écart se resserre !
À ce moment l'enseignant peut choisir de faire *un petit saut dans le formalisme* et proposer aux élèves de généraliser leur démarche à un temps t quelconque, en décomposant en n étapes de durée chacune $\frac{t}{n}$. On trouve alors comme approximations de la quantité de sel $S(t)$ (voir le détail à l'annexe 1)

$$G_n(t) := S(0)\left(1 - \frac{v}{V}\frac{t}{n}\right)^n \text{ et } H_n(t) := \frac{S(0)}{\left(1 + \frac{v}{V}\frac{t}{n}\right)^n}$$

où on a appelé ici v les deux débits et V le volume de liquide dans le récipient (mais on peut garder 10 l/mn et 100 l).

Le *bilan* de cette première partie de la situation devrait alors être, au plan particulier du phénomène étudié, une *conjecture* des élèves : les deux fonctions G_n et H_n devraient, pour chaque valeur de t, converger quand n tend vers l'infini, vers une quantité $S(t)$ qui devrait être la vraie quantité de sel à l'instant t.
Un *double saut épistémologique* se profile là :
– d'une part, l'idée qu'un phénomène réel ne peut parfois être modélisé que par un procédé de passage à la limite propre aux mathématiques, et plus précisément à l'analyse ; quelque chose de réel, de concret, n'est ainsi explicable qu'à travers des concepts abstraits et non algébriques ;
– de l'autre, le fait qu'une fonction *a priori* inconnue, comme $t \to S(t)$ dans notre problème, ne peut parfois être obtenue que comme limite (ici pour l'instant ponctuelle) d'une suite de fonctions connues plus simples (ici des polynômes).
Si ce deuxième aspect ne pourra guère être développé en terminale, par contre le premier est *l'un des enjeux philosophiques de la collaboration entre mathématiques et physique*. De nombreux textes ont été publiés sur cette question (voir par exemple [6] et[8]), et nous n'y reviendrons pas ici, mais nous insistons sur le fait qu'il ne faut

absolument pas éluder cette question dans les classes : *pas de confrontation mathématiques-physique sans réflexion épistémologique*.

Pour conclure sur cette première partie de la situation, nous voudrions évoquer le problème de la méthode d'Euler. Dans la discrétisation qui sera sans doute mise spontanément en œuvre par les élèves, il n'y a ni équation différentielle, ni solution d'une équation différentielle qu'on souhaiterait approcher par une méthode numérique : aucune « méthode d'Euler mathématique ». Il n'apparaît qu'une *méthode d'Euler physique*, qui consiste à discrétiser un phénomène réel en le regardant évoluer de façon approchée à petits pas (ici, de temps). Il se trouve que la discrétisation motivée par EP1 est exactement la méthode d'Euler qui est au programme $\left(\text{appliquée à l'équation } y' = -\frac{v}{\mathrm{V}} y\right)$ et qu'elle a ainsi, dans cette situation, une motivation issue d'un essai de modélisation. Pour EP2, c'est plus compliqué (ce serait sans doute la méthode d'Euler rétrograde – partant de $(t,\mathrm{S}(t))$ et non de $(0,\mathrm{S}(0))$ –, mais l'interprétation physique serait ici bizarre : on ajouterait du sel et enlèverait de l'eau pure du mélange !).

II.4. Le passage au continu et à l'équation différentielle

À partir de la conscience des élèves que la méthode de discrétisation ne peut être exacte, on peut leur proposer de travailler avec un intervalle de temps, noté Δt, de plus en plus petit, pour voir ce qu'on pourrait trouver en passant à la limite. L'enjeu est alors d'évaluer l'accroissement $\Delta\mathrm{S}$ (négatif) de la quantité de sel entre les instants t et $t + \Delta t$. Le point crucial est de faire prendre conscience aux élèves qu'on peut encadrer $\Delta\mathrm{S}$ en encadrant la concentration $\mathrm{C}(u) := \frac{\mathrm{S}(u)}{100}$ (ou $\frac{\mathrm{S}(u)}{\mathrm{V}}$ si on est passé à un stade un peu plus formel) lorsque $u \in [t, t + \Delta t]$, et que cela est facile en remarquant que la fonction $t \to \mathrm{S}(t)$ est *décroissante*, ce qui est physiquement évident. On en déduit l'inégalité $|\Delta\mathrm{S}| \leq \frac{\mathrm{S}(t)}{\mathrm{V}} \times \Delta t$ (ce qui donne la continuité – à droite – de la fonction S), mais surtout en encadrant C(u) entre $\frac{\mathrm{S}(t)}{\mathrm{V}}$ et $\frac{\mathrm{S}(t+\Delta t)}{\mathrm{V}}$ on trouve

$$-\frac{\mathrm{S}(t)}{\mathrm{V}} \times v \leq \frac{\Delta\mathrm{S}}{\Delta t} \leq -\frac{\mathrm{S}(t+\Delta t)}{\mathrm{V}} \times v.$$

Les élèves devraient pouvoir en déduire la dérivabilité de la fonction S, et la relation

$$\mathrm{S}'(t) = -\frac{v}{\mathrm{V}}\mathrm{S}(t),$$

c'est-à-dire l'équation différentielle de la fonction cherchée S.

II.5. Quel bilan avec les élèves ?

Le *bilan* que les élèves devraient alors être prêts à admettre est que la fonction inconnue $t \to \mathrm{S}(t)$ vérifie effectivement une équation différentielle (la notion peut alors en être introduite à propos de cet exemple) : $S'(t) = -\frac{v}{V}S(t)$., et que les deux suites G_n et H_n (de fonctions) vues dans l'étape de discrétisation convergent vers une solution de cette équation différentielle qui sera la solution du problème physique cherché. L'enseignant devrait alors être en position de faire prendre conscience aux élèves qu'aucune des fonctions qu'ils connaissent déjà n'est solution du problème (on peut leur faire faire des essais), et d'introduire le cours sur cette nouvelle fonction : l'exponentielle.

Enfin, on peut clairement utiliser cette activité comme situation de référence pour la suite du programme, par exemple pour l'intérêt de ramener l'équation $y' = ky$ à $y' = y$, ou pour motiver physiquement l'unicité de la solution de l'équation différentielle $y' = ky$ prenant une valeur en un point, ou pour illustrer l'effet d'une translation sur la variable (changer l'origine des temps ne peut influer sur un phénomène physique), ou pour introduire ou illustrer la méthode d'Euler.

III. La mise en œuvre dans une classe en 2008-2009

III.1. Scénario pédagogique

Le problème de la dilution d'une solution saline a été soumis par moi[1] à une classe de terminale S du lycée Louis Pasteur à Besançon lors du premier cours de mathématiques de l'année, en classe entière.
Le scénario pédagogique a été décomposé en quatre phases :
Première phase : imprégnation individuelle du problème suivie d'une brève mise au point. Elle a duré 10 minutes.
Deuxième phase : recherche par groupes de trois ou quatre élèves pendant 30 minutes. Les groupes sont constitués par le professeur au hasard (il s'agit du premier cours).
Troisième phase : synthèse collective d'un quart d'heure.
Quatrième phase : recherche individuelle courte puis collective d'un modèle continu, conduisant à l'équation différentielle $S' = kS$ et introduction de la fonction exponentielle. Cette dernière phase a nécessité trois quart d'heure.

III.2. Déroulement de la séance

Première phase :
L'énoncé, court et explicite, ne soulève pas de difficulté particulière de compréhension. Il permet donc une appropriation assez rapide du problème par tous les élèves qui s'engagent spontanément dans la recherche de sa résolution. Aucun questionnement sur la nature exacte ou approchée de la réponse attendue n'émerge.

Deuxième phase :
La mise en place des groupes se fait calmement et rapidement. Les élèves sont actifs. Compte tenu des données numériques choisies, et après quelques tâtonnements, la

(1) Il s'agit dans ce paragraphe III du deuxième auteur Nicolas Magnin, observateur de sa propre classe.

très grande majorité discrétise le problème en découpant une heure en soixante minutes ainsi qu'il était attendu. Le modèle utilisé est exclusivement celui correspondant à l'expérience de pensée n° 1. Toutefois les hypothèses sous-jacentes restent implicites à ce stade. Les élèves ne construisent pas d'expérience de pensée. Ils constatent que, chaque minute, la solution perd 10% de sa masse de sel, ce qui leur suffit pour parvenir à l'approximation $10 \times (0,9)^n$. Beaucoup (mais pas tous) reconnaissent une suite géométrique.
La notion de débit en tant que telle n'est pas exploitée, ce qui laisse entrevoir des difficultés à venir si l'on modifie l'intervalle de temps, ou si l'on décide de généraliser la situation sans affecter de valeur au débit. Quelques groupes plus avancés affinent le résultat obtenu en découpant l'heure en 3600 secondes. La conversion du débit en $L.s^{-1}$ s'avère parfois délicate.

Troisième phase :
La synthèse de ce premier travail est rapide. J'ai demandé aux élèves d'expliciter leur démarche ; ils sont parvenus à mettre en évidence leurs hypothèses de travail, à savoir le remplissage pendant un intervalle de temps donné suivi d'une vidange immédiate. L'autre expérience de pensée a alors été évoquée. La notion de modélisation mathématique d'une expérience physique est alors mise en exergue. Le questionnement sur la validité du résultat obtenu s'est posé naturellement, et la diminution de l'intervalle de temps servant à la discrétisation s'impose à la majorité comme une façon d'améliorer la précision de la valeur obtenue. Cependant, quelques élèves ne sont pas convaincus qu'un tel découpage mène à une approximation plus fine. Ils sont gênés par le caractère discret du modèle établi intuitivement, qu'ils jugent peu réaliste. La nature continue de la situation initiale apparaît clairement par des affirmations du type « tout change tout le temps » (la concentration et la masse de sel).
À ce niveau, il aurait peut-être été possible de généraliser la démarche (volume et débit non fixés, temps au bout duquel on veut obtenir la concentration en sel quelconque, …) comme le scénario théorique le suggérait, et d'investiguer plus avant l'expérience de pensée n° 2, beaucoup moins intuitive et naturelle. Il faut cependant procéder à des arbitrages. Des contraintes temporelles d'une part, la volonté d'éviter un formalisme précoce et préjudiciable à l'objectif de l'activité d'autre part m'ont conduit à orienter le travail sur le modèle continu.
Ne l'oublions pas, le but est bien d'introduire la fonction exponentielle conformément au programme. Envisager l'exponentielle comme limite d'une suite de fonctions n'en est pas un objectif prioritaire. Toutefois, il est tout à fait concevable de faire établir et d'exploiter ultérieurement l'encadrement de $S(t)$ par $G_n(t)$ et $H_n(t)$. Il me semble que cela n'est cependant pas accessible à tous les élèves, et que ce peut être le fruit d'un travail différencié, en devoir en temps libre par exemple.

Quatrième phase :
Les élèves sont invités à réfléchir en groupes sur les informations dont ils disposent pour décrire plus précisément l'expérience exposée afin de construire un nouveau modèle qui serait plus conforme à la réalité. Les réponses restent assez qualitatives :

la concentration et la masse de sel décroissent, le volume d'eau dans le réservoir reste constant. Après une dizaine de minutes, aucun élève n'a pris l'initiative d'analyser ce qui se passe pendant un intervalle de temps restreint à l'instar de ce qui a été fait pour le modèle discret. J'ai donc dû suggérer fortement cette idée et revenir à un travail collectif de la classe. Ce n'est guère étonnant, puisque c'est la première fois que les élèves ont à modéliser par la procédure de l'accroissement différentiel : ils ne peuvent pas l'inventer tout seuls !

La stabilité du volume dans le récipient oriente le travail sur l'évolution de la concentration de la solution qui s'écoule pendant une durée donnée. Des élèves parviennent à énoncer clairement, en français, que cette concentration est comprise entre la concentration massique en sel dans le récipient « après et avant ». L'introduction des notations t et Δt se fait avec mon aide. Les élèves parviennent à écrire que $\frac{\mathrm{S}(t+\Delta t)}{100} \leq \mathrm{C}(u) \leq \frac{\mathrm{S}(t)}{100}$, où C($u$) représente ici la concentration en sel du volume à l'instant u entre t et $t + \Delta t$. L'explicitation de l'expression de la concentration en sel du volume qui s'est écoulé entre les instants t et $t + \Delta t$, à savoir $\frac{\mathrm{S}(t)-\mathrm{S}(t+\Delta t)}{10\Delta t}$, soulève davantage de difficultés, notamment parce que la proportionnalité entre la durée et le volume de solution qui s'écoule pendant cette durée n'apparaît pas comme une évidence(2).

Cette écriture n'est pas immédiatement interprétée en termes de taux de variation.

Quelques élèves finissent par l'évoquer, non sans peine, mais sans aide. Ils établissent ensuite, laborieusement, le lien avec le nombre dérivé. L'idée de réduire Δt et de passer à la limite n'est cependant pas naturelle et doit être impulsée. Cela n'est guère surprenant : obtenir et exploiter une information sur la dérivée de S pour déterminer S n'est pas une démarche habituelle ou connue des élèves. Par ailleurs S est une grandeur physique qui ne représente pas, pour une grande majorité, une fonction mathématique(3).

En revanche, une fois le passage à la limite accepté, le théorème des gendarmes (qui n'a jusqu'à présent été rencontré que dans le cadre des suites numériques) et la continuité de S sont utilisés de manière intuitive et implicite pour conclure que $-0{,}1\mathrm{S}(t) \leq \mathrm{S}'(t) \leq -0{,}1\mathrm{S}(t)$, et par conséquent que $\mathrm{S}'(t) = -0{,}1\mathrm{S}(t)$.

La mise en place de cette équation a bien entendu été guidée, mais sans découpage *a priori* des tâches à effectuer de façon à laisser aux élèves le maximum d'initiative et pour privilégier la spontanéité des échanges entre élèves et entre élèves et professeur. Les élèves ne perçoivent évidemment pas qu'il est possible de justifier la continuité de S, cette notion leur est encore inconnue. Ils ne perçoivent pas non plus que seule la dérivabilité à droite est acquise.

---

(2) Il apparaît là que la notion de « débit » n'a guère été traitée antérieurement, ni en physique, ni en mathématiques (dans des problèmes de modélisation par des fonctions linéaires, en troisième ou seconde, ou avec la notion de débit instantané comme exemple du concept de dérivée, en première).

(3) La notion de « grandeur variable » devrait être plus systématiquement associée au concept de fonction, dès la troisième.

Ils sont perplexes devant l'équation différentielle obtenue. Elle ne fournit en effet pas de valeur pour S(60). Ils ont testé, en dérivant des fonctions usuelles, qu'il n'en existait aucune qui satisfaisait les deux conditions dont on dispose sur S : elle est liée à sa dérivée par un lien de proportionnalité et S(0) = 10. La fonction exponentielle a donc été introduite, par nécessité.
Les élèves ont ensuite eu la charge de résoudre le problème initial permettant ainsi de réinvestir la dérivée de la composée d'une fonction par une fonction affine.

III.3. Prolongement

Il y a eu un retour sur les approximations obtenues avec le modèle discret qui a permis de faire le lien avec la méthode d'Euler employée pour approcher la courbe de la fonction exponentielle. Cette méthode n'avait pas été abordée avec tous les élèves en première S, donc certains l'ont découverte.
La précision des approximations fournies par le modèle discret a été discutée. Le cours concernant la fonction exponentielle a suivi ce travail.

III.4. Conclusion

Ce problème a été bien accueilli par les élèves. Sa forme, ouverte, laisse toute autonomie quant aux stratégies de résolution. Il a été soumis à plusieurs classes (avec d'autres professeurs), de niveaux différents, en offrant chaque fois des pistes variées et constructives.
Voici une liste, non exhaustive, des bénéfices que l'on peut retirer de cette situation :

- Elle met tous les élèves en activité.
- Elle permet un réel travail différencié en classe, mais également dans le cadre d'un devoir en temps libre puisque les prolongements possibles sont nombreux.
- Elle légitime l'introduction de la fonction exponentielle en lui donnant du sens puisqu'elle émerge naturellement d'une situation (presque) concrète. Celle-ci a d'ailleurs été travaillée par le groupe Mathématiques-Sciences Physiques de l'IREM de Besançon avec des résultats très probants lors de la phase d'expérimentation.
- Elle permet de réinvestir, sans procéder à des révisions systématiques, un certain nombre de notions d'analyse de première S : suites géométriques, convergence d'une suite, définition du nombre dérivé, lien entre fonction dérivée et variations, dérivée de la composée d'une fonction affine par une fonction, … Ces notions seront reprises ultérieurement, conformément au programme, mais leur réinvestissement régulier en favorise l'acquisition progressive et, souhaitons le, pérenne.
- Elle est une des situations de référence que les élèves ont retenues et appréciées, en ancrant définitivement les fonctions exponentielles comme des fonctions proportionnelles à leur dérivée. Elle constitue également un bon point d'appui pour l'étude des équations différentielles, et peut être prolongée pour donner du sens à la résolution d'équations du type $y' = ay + b$.
- De nombreuses situations connexes existent en sciences physiques. On peut espérer que les élèves s'y engageront avec plus d'aisance en ayant été familiarisés avec ce type modélisation.

Cette activité permet d'expliciter clairement ce qu'est un modèle, de montrer qu'une situation peut-être modélisée de différentes manières. Elle engage les élèves dans une véritable démarche scientifique. C'est là un objectif majeur de l'enseignement des mathématiques. Cette portée de la discipline a eu un réel impact sur les élèves.

Annexe 1. Le raisonnement de discrétisation

La discrétisation par minute

Pour EP1, si S_n est la quantité de sel *au début* de la (n + 1)-ème minute, la concentration est $c_n = \dfrac{S_n}{100}$, donc il s'écoule $10c_n = \dfrac{10S_n}{100}$ pendant la minute, et il reste $S_{n+1} = S_n - \dfrac{10S_n}{100} = 0{,}9S_n$. Donc $S_{60} = S_0\left(0{,}9\right)^{60}$.

Pour EP2, la concentration en sel *à la fin* de la (n + 1)-ème minute (juste avant la vidange instantanée) est $c'_n = \dfrac{S_n}{100+10}$, donc il part instantanément $10c'_n = \dfrac{10S_n}{110}$ et il reste $S_{n+1} = S_n - \dfrac{10S_n}{110} = \dfrac{10}{11}S_n$; donc $S_{60} = S_0\left(\dfrac{10}{11}\right)^{60}$.

La discrétisation par intervalles de temps de durée $\dfrac{t}{n}$

Ce sont exactement les deux mêmes raisonnements, à la seule différence que l'apport d'eau pure et le volume de départ du mélange, pendant une telle durée entre les instants $k\dfrac{t}{n}$ et $(k+1)\dfrac{t}{n}$, est $v\dfrac{t}{n}$ (et non plus v). Par exemple, pour EP2 on obtient

$$S_{k+1} = S_k - \frac{S_k}{V + \frac{vt}{n}} \times \frac{vt}{n} = S_k\left(1 - \frac{\frac{vt}{n}}{V + \frac{vt}{n}}\right) = \frac{S_k}{1 + \frac{v}{V}\frac{t}{n}}.$$

On peut de plus remarquer que dans EP1 la concentration utilisée est supérieure à la « véritable » concentration (variable) pendant l'intervalle de temps considéré ; on a donc majoré la quantité de sel évacué, et donc minoré la quantité de sel restant, et ceci à chaque étape. Donc $S(t) \geq G_n(t)$.

Pour EP2, la concentration utilisée est $\dfrac{S_k}{V + \frac{vt}{n}}$, alors que la concentration « réelle » est entre $\dfrac{S_k}{V}$ et $\dfrac{S_{k+1}}{V} = \dfrac{S_k}{V + \frac{vt}{n}}$; on a donc minoré la concentration, donc majoré la quantité de sel. On a donc $H_n(t) \geq S(t)$. Ainsi les deux expériences de pensée encadrent la fonction S cherchée.

Dit autrement, on a une « démonstration physique » des inégalités

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq \exp(-x) \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n},$$

lorsque $x \geq 0$.

Annexe 2 Une preuve élémentaire de la convergence des discrétisations

Une telle preuve pourrait être faite (par exemple en devoir) après une première étude de la fonction exponentielle, et donner une confirmation *a posteriori* pour les élèves du bien fondé de leur approche par discrétisation. Mais elle est difficile pour un élève de terminale, même « très bon ». On la donne donc essentiellement pour les collègues.

Supposons qu'on sache que $\mathrm{e}_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ converge, quand $n \to +\infty$, vers $\exp(x)$, pour $x \geq 0$, soit en partant de l'équation différentielle (mais il faut déjà disposer du concept de primitive), soit parce que c'est la construction choisie de l'exponentielle. Dans ce dernier cas, il est assez facile de montrer que c'est la solution de l'équation différentielle $y' = y$ valant 1 en 0. Ce point est admis dans [3], mais la formule du binôme montre que si $x \geq 0$ et $h \neq 0$ on a

$$\left|\frac{\mathrm{e}_n(x+h)-\mathrm{e}_n(x)}{h} - \mathrm{e}_{n-1}(x)\right| \leq |h| \sum_{k=1}^{n} \frac{(x+1)^k}{k!} \leq |h| \exp(x+1).$$

Puis on fait tendre n vers $+\infty$, et ensuite h vers 0, pour obtenir le résultat.

Alors la fonction $\mathrm{S}(t)$ introduite à la fin de l'activité de dilution du sel est clairement la fonction

$$\mathrm{S}(t) = \mathrm{S}(0)\exp\left(-\frac{v}{\mathrm{V}}t\right).$$

Mais il est facile de montrer l'inégalité

$$\left|\mathrm{e}_n(x) - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| \leq \frac{x^2}{n}\exp(|x|), \qquad (*)$$

qui montre que le premier membre tend vers 0 si n tend vers $+\infty$. Ceci est assez naturel : en développant $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ par la formule du binôme, on voit que pour k fixé le coefficient de $\frac{x^k}{k!}$, à savoir $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n^k}$, tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

On déduit immédiatement de ceci que $\mathrm{G}_n(t) \to \mathrm{S}(t)$ quand $n \to +\infty$.

Mais on a $\frac{\mathrm{G}_n(t)}{\mathrm{H}_n(t)} \leq 1$, donc, en posant $\frac{v^2t^2}{\mathrm{V}^2n^2} = u$,

$$0 \leq 1 - \frac{G_n(t)}{H_n(t)} = 1 - (1-u)^n$$
$$= u\left(1 + (1-u) + (1-u)^2 + \ldots + \left(1 - u^{n-1}\right)\right) \leq nu = \frac{v^2 t^2}{V^2 n} \to 0$$

quand $n \to +\infty$. Par suite $H_n(t) \to S(t)$ quand $n \to +\infty$.

Reste à montrer (*). On a

$$\left|e_n(x) - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right| = \left|\sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!}\left(1 - \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\right)\right|$$
$$\leq \sum_{k=2}^{n}\left[\frac{|x|^k}{k!}\frac{k-1}{n}\left(1 + \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^{k-1}\right)\right]$$
$$\leq \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{x^k}{k!}k(k-1) = \frac{x^2}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{|x|^k}{k!} \leq \frac{x^2 \exp(x)}{n}.$$

Bibliographie

[1] CNP, *Radioactivité*, Accompagnement des programmes, physique, mathématiques, sciences de la vie et de la Terre (terminale S).

[2] Ferrier J.-P., *La radioactivité sans exponentielle (ni probabilités)*, Repères IREM n° 65, octobre 2006.

[3] Fréchet M., *Équation différentielle y′ = y et fonction exponentielle*, Bulletin de l'APMEP n° 460, octobre 2005.

[4] Friedelmeyer J.-P., *Comment introduire les fonctions logarithmes et exponentielles au lycée ?*, Bulletin de l'APMEP n° 460, octobre 2005.

[5] Malonga Moungabio F., *Les équations différentielles à l'interface mathématiques-physique : praxéologie et jeux de cadres de rationalité dans les manuels de terminale S*, Recherche en didactique des Mathématiques, vol 29/3, 2009, p. 335-357.

[6] Robert C. et Treiner J., *Une double émergence*, Bulletin de l'APMEP n° 453, octobre 2004.

[7] Rogalski M. et all., *Carrefours entre analyse algèbre géométrie*, Ellipses, 2001.

[8] Rogalski M., *Mise en équation différentielle et mesure des grandeurs par une intégrale, en terminale scientifique : un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique*, Repères IREM n° 64, juillet 2006.

[9] Warusfel A., *Notes de cours : la radioactivité. Un mathématicien, un physicien et un probabiliste aux prises avec la radioactivité*, Revue des Mathématiques de l'Enseignement Supérieur, vol. 114, n° 1, 2003/2004 ; repris dans le Bulletin de l'APMEP n° 455, décembre 2004.