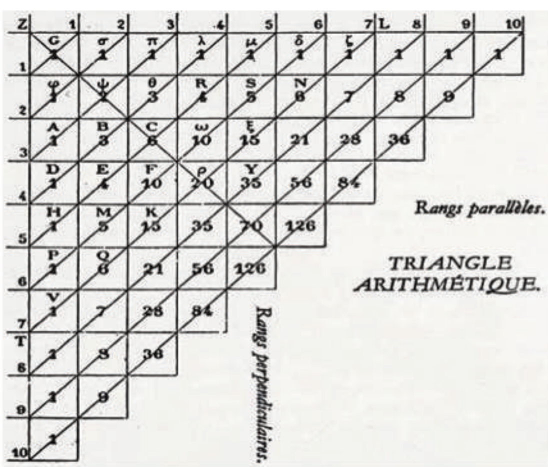
Construction des coefficients binomiaux en vue de l'introduction de la loi binomiale en Première S avec le nouveau programme

Agnès Grimaud(*)

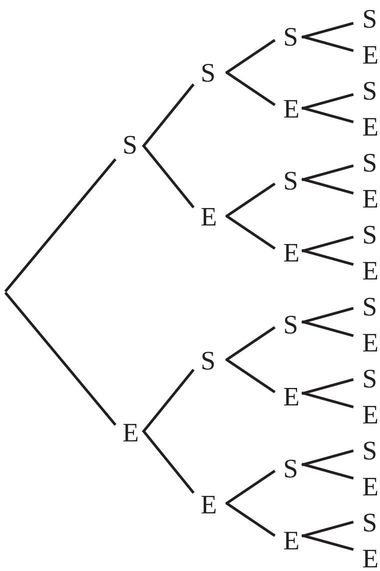
La réforme du programme de Première scientifique à la prochaine rentrée scolaire m'amène à faire quelques remarques pour la mise en place de la loi binomiale.
Les coefficients binomiaux étaient connus sous la forme du triangle en Orient et au Moyen-Orient (au X^{e} et au XI^{e} siècle) plusieurs siècles avant que Blaise Pascal ne leur consacre un traité : « Traité du triangle arithmétique » en 1654 (publié à Paris en 1665) dans lequel il donne sa construction à l'aide de la formule qui porte son nom : $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$ et démontre 19 de ses propriétés. Avec la propriété 12, il donne le moyen de calculer les coefficients binomiaux par la relation : $\binom{n}{k}=\frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$, ce qui permet de les calculer de proche en proche à partir des $\binom{n}{0}$. Et il met en place pour démontrer cette propriété une première démonstration par récurrence.



(*) a2grimaud@gmail.com

Sur un arbre représentant les répétitions d'une même expérience aléatoire, les coefficients binomiaux comptent le nombre de chemins réalisant k succès pour n répétitions (voir exemple ci-dessous). Il est facile pour deux, trois et quatre répétitions de représenter l'arbre, cela devient fastidieux et très vite irréalisable au-delà de quatre expériences de compter les chemins qui réalisent k succès parmi n expériences identiques.

Exemple avec la répétition de 4 expériences identiques :



4 succès
3 succès et 1 échec
3 succès et 1 échec
2 succès et 2 échecs
3 succès et 1 échec
2 succès et 2 échecs
2 succès et 2 échecs
1 succès et 3 échecs
3 succès et 1 échec
2 succès et 2 échecs
2 succès et 2 échecs
1 succès et 3 échecs
2 succès et 2 échecs
1 succès et 3 échecs
1 succès et 3 échecs
4 échecs

Donc il y a un seul chemin pour 4 succès donc $\binom{4}{4} = 1$;

quatre chemins pour 3 succès et 1 échec donc $\binom{4}{3} = 4$;

six chemins pour 2 succès et 2 échecs donc $\binom{4}{2} = 6$;

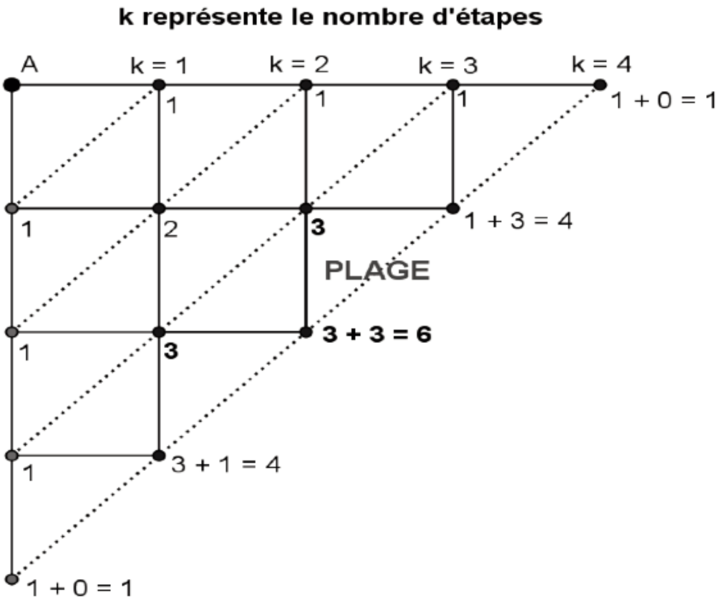
quatre chemins pour 1 succès et 3 échecs donc $\binom{4}{1} = 4$;

un seul chemin pour 4 échecs donc $\binom{4}{0} = 1$.

Pour pouvoir déterminer les coefficients binomiaux, on peut visualiser les chemins par une ville de bord de mer, les rues étant Est-Ouest ou Nord-Sud, la plage étant orientée NE-SO (voir schéma ci-dessous) et on compte les différents itinéraires qui mènent à chaque point de la plage en partant d'un point donné (le sommet A du triangle) en ayant le choix entre deux directions (on peut imaginer que l'on joue à Pile ou Face avec une pièce équilibrée avant chaque déplacement) : droite et bas (ou ouest et sud). Pas de probas encore…

Pour trouver le nombre d'itinéraires permettant d'arriver à un point (en chaque point on comptabilise le nombre de chemins qui y arrivent), on ajoute les valeurs des points les plus proches de la diagonale précédente.

Par exemple : cette situation concrète nous permet de déterminer les coefficients binomiaux dans le cas $k = 4$, voir schéma :



Nous avons en tout 16 chemins (c'est-à-dire 2^4 chemins différents), ce qui correspond bien au nombre de branches de l'arbre de répétitions.

On peut aussi remarquer que le nombre de chemins différents pour 1, 2 ou 3 expériences correspond bien : 2^1, 2^2 ou 2^3, il suffit de les comptabiliser au niveau de la diagonale correspondante au nombre d'étapes.

De manière générale, le nombre total de chemins pour n expériences est 2^n (ceci se démontre par le théorème de récurrence mais pas en Première où on se contente de le conjecturer).

Étude des coefficients binomiaux dans le cas général

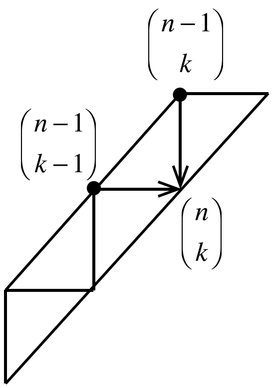
Comment déterminer les coefficients binomiaux ou à quelles règles obéissent-il dans le cas de n expériences identiques ? Avec nos notations, dans le cas de n expériences identiques, on atteint $n + 1$ points distincts de la plage en exactement n étapes en partant du point A.

• Pour arriver aux extrémités du bord de la plage : un seul itinéraire correspond (toujours la même direction : droite pour l'une et bas pour l'autre).

D'où, avec la notation des coefficients binomiaux, on a : $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$.

• Donc par symétrie, on a : $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

• En chaque point de la plage, pour compter les itinéraires il suffit d'ajouter les valeurs des points les plus proches de la ligne précédente (qui correspond à $n-1$ étapes).



D'où, avec la notation des coefficients binomiaux, on a la relation de Pascal :
$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k}$.

• Supposons qu'un promeneur probabiliste se rende à la plage en jouant à pile ou face avec une pièce équilibrée. La variable aléatoire donnant le point d'arrivée du promeneur sur la plage suit une loi binomiale de paramètre $\frac{1}{2}$; en effet on fait le quotient entre le nombre d'itinéraires favorables et le nombre total d'itinéraires. La formule dans le cas de la loi binomiale de paramètre $\frac{1}{2}$ se déduit sans problème : la probabilité de k succès (donc $n-k$ échecs) parmi n expériences identiques, où la probabilité du succès est égale à la probabilité d'échec, est donnée par : $\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$.

Pour arriver à ces résultats, on ne se sert jamais de l'indépendance des expériences, on utilise seulement l'hypothèse d'équiprobabilité des itinéraires.

Pour le cas général, on procède comme indiqué dans le programme.

Remarque sur le calcul explicite des coefficients binomiaux.

Cette partie n'est pas un attendu du programme et on doit se passer de ce résultat pour tous les calculs avec une binomiale en Première.

• En utilisant la règle 12 du Traité du triangle arithmétique de Pascal, on montre : $\binom{n}{1} = \frac{n-1+1}{1}\binom{n}{0} = n$. Or $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$ par la propriété de symétrie.

On peut aussi le montrer en comptant le nombre des itinéraires pour arriver à ce point : pour calculer $\binom{n}{1}$, il faut n directions vers le bas et 1 vers la droite donc n itinéraires différents.

D'où, avec la notation des coefficients binomiaux, on a : $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

• Toujours en utilisant la règle 12 du Traité du triangle arithmétique de Pascal, on montre : $\binom{n}{2} = \frac{n-2+1}{2}\binom{n}{1} = \frac{n(n-1)}{2}$ et $\binom{n}{3} = \frac{n-3+1}{3}\binom{n}{2} = n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)$.

D'où, avec la notation des coefficients binomiaux, on a :
$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$ et $\binom{n}{3} = \binom{n}{n-3} = n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)$.

• D'où, la formule générale, pour n expériences et k entier, $k \leq n$, qui se démontre en utilisant le théorème de récurrence : $\binom{n}{k} = n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\times\ldots\times\frac{n-(k-1)}{k}$.

Extrait du nouveau programme de Première S

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli. Schéma de Bernoulli, loi binomiale (loi du nombre de succès). Coefficients binomiaux, triangle de Pascal.	• Reconnaître des situations relevant de la loi binomiale. • Calculer une probabilité dans le cadre de la loi binomiale. • Démontrer que $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$	La représentation à l'aide d'un arbre est privilégiée : il s'agit ici d'installer une représentation mentale efficace. On peut ainsi : – faciliter la découverte de la loi binomiale pour des petites valeurs de n ($n \leq 4$) ; – introduire le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ comme nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès pour n répétitions ; – établir enfin la formule générale de la loi binomiale. Cette égalité est établie en raisonnant sur le nombre de chemins réalisant k + 1 succès pour n + 1 répétitions. On établit également la propriété de symétrie des coefficients binomiaux.

Référence :

Le traité du triangle arithmétique de Pascal dont voici le début, la suite se trouve sur Google livre.

TRAITTE' DV TRIANGLE

ARITHMETIQVE,

DEFINITIONS.

I'Appelle Triangle Arithmetique, vne figure dont la construction est telle.

Ie mene d'vn point quelconque, G, deux lignes perpendiculaires, l'vne à l'autre, G V, G ζ, dans chacune desquelles ie prens tant que ie veux de parties égales, & continuës à commencer par G, que ie nomme 1. 2. 3. 4. &c. & ces nombres sont les exposans des diuisions des lignes.

En suitte ie ioints les points de la premiere diuision qui sont dans chacune des deux lignes, par vne autre ligne qui forme vn triangle dont elle est la base.

Ie ioints ainsi les deux points de la seconde diuision par vne autre ligne, qui forme vn second triangle dont elle est la base.

Et ioignant ainsi tous les points de diuision, qui ont vn mesme exposant, i'en forme autant de triangles & de bases.

Ie mene par chacun des points de diuision, des lignes paralleles aux costez, qui par leurs intersections forment de petits quarrez, que i'appelle Cellules.

Et les cellules qui sont entre deux paralleles qui vont de gauche à droit, s'appellent cellules d'vn mesme rang parallele, comme les cellules, G, σ, π, &c. ou φ, ψ, θ, &c.

Et celles qui sont entre deux lignes qui vont de haut en bas, s'appellent, cellules d'vn mesme rang perpendiculaire, comme les cellules G, φ, A, D, &c. & celles-cy, σ, ψ, B, &c.

Et celles qu'vne mesme base trauerse diagonalement sont dites cellules d'vne mesme base, comme celles qui suiuent, D, B, θ, λ, & celles-cy, A, ψ, π.

Les cellules d'vne mesme base également distantes de ses extremitez, sont dites reciproques, comme celles-cy, E, R, & B, θ. Parce que l'exposant du rang parallele de l'vne, est le mesme que l'exposant du rang perpendiculaire de l'autre, comme il paroist en cet exemple, ou E, est

A

2 TRAITTE' DV TRIANGLE

dans le second rang perpendiculaire, & dans le quatriesme parallele: & sa reciproque R, est dans le second rang parallele, & dans le quatriesme perpendiculaire reciproquement. Et il est bien facile de demonstrer que celles qui ont leurs exposans reciproquement pareils, sont dans vne mesme base, & également distantes de ses extremitez.

Il est aussi bien facile de demonstrer, que l'exposant du rang perpendiculaire de quelque cellule que ce soit, ioint à l'exposant de son rang parallele, surpasse de l'vnité l'exposant de sa base.

Par exemple, la cellule F, est dans le troisiéme rang perpendiculaire, & dans le quatriesme parallele, & dans la sixiesme base, & ces deux exposants des rangs, 3 † 4 surpassent de l'vnité l'exposant de la base 6. ce qui vient de ce que les deux costez du Triangle sont diuisez en vn pareil nombre de parties; mais cela est plustost compris, que demonstré.

Cette remarque est de mesme nature, que chaque base contient vne cellule plus que la precedente, & chacune autant que son exposant d'vnitez, ainsi la seconde φ σ à deux cellules, la troisiesme A ψ π en a trois &c.

Or les nombres qui se mettent dans chaque cellule se trouuent par cettte methode.

Le nombre de la premiere cellule qui est à l'angle droit est arbitraire, mais celuy-là estant placé tous les autres sont forcez, & pour cette raison il s'appelle le Generateur du triangle. Et chacun des autres est specifié par cette seule regle.

Le nombre de chaque cellule, est égal à celuy de la cellule qui la precede dans son rang perpendiculaire, plus à celuy de la cellule qui la precede dans son rang parallele. Ainsi la cellule F, c'est à dire le nombre de la cellule F, égale la cellule C, plus la cellule E; & ainsi des autres.

D'où se tirent plusieurs consequences. En voicy les principales, ou ie considere les triangles, dont le generateur est l'vnité; mais ce qui s'en dira conuiendra à tous les autres.

Le résultat des travaux de recherche faits par des élèves du lycée (élèves que j'ai eu en terminale et pour l'un aussi en première) lorsqu'ils étaient en seconde dans le cadre du club « Math en Jeans » a été exposé par ces trois élèves devant leurs camarades qui avaient été très intéressés. On peut trouver leur travail à l'adresse suivante :
http://mathenjeans.free.fr/amej/edition/2008/bordeaux-taillan-edoc2008/laplage_bordeaux_2008.pdf

et aussi dans : le Bulletin vert n° 482 p 371