Des polygones et des angles en Cinquième

Michèle Drouilhet et Laurence Konilovski(*)

Introduction

Habituellement pour introduire la propriété de la somme des angles d'un triangle, on commence par conjecturer soit par découpage soit par mesure, puis on démontre cette conjecture en utilisant la notion d'angles alternes-internes et en introduisant la droite passant par un sommet du triangle et parallèle au côté opposé. L'introduction de cette droite nous a toujours semblée artificielle et nous nous sommes alors posé la question de trouver une approche plus naturelle pour les élèves. Cette réflexion a été proposée lors de réunions de formation de formateurs associés au stage du PAF intitulé « Démonstrations au collège ».

Les études didactiques préconisent d'aborder les notions nouvelles par des Activités d'Étude et de Recherche : activité qui doit laisser une large place à l'action et à la réflexion des élèves. Toute AER proposée à la classe doit ainsi provoquer l'émergence de notions et outils mathématiques visés. Ici, on a posé suivant les classes l'une ou l'autre des questions : « Quelle est la somme des angles d'un polygone ? » ou « Quelle est la somme des angles d'un quadrilatère ? » Pour répondre à ces questions, déterminer la somme des angles d'un triangle est indispensable ce qui permet la mise en évidence de la propriété visée du programme de Cinquième.

Conditions

Cette activité se place après l'étude des angles alternes-internes ou de la symétrie centrale. Le temps imparti est d'environ 1h 15min.

Mise en place

Nous avons essayé deux approches. La première en travail de groupe sur deux classes avec comme question « Combien mesure la somme des angles d'un polygone ? » et la seconde en classe entière avec la seconde question.

Déroulement de la première approche

Les groupes étaient composés de cinq ou six élèves disposant d'une feuille A3 pour les essais lors de la recherche. Très rapidement, les élèves disent que cette somme dépend du nombre de côtés du polygone. Sans doute influencés par le mot « mesure » de la question, la totalité des groupes trace différents polygones, puis

(*) Collège Léonard de Vinci, Tournefeuille (31), michele.drouilhet@neuf.fr
Collège de Villeneuve Tolosane-(31), laurence.konikowski@orange.fr

mesure très soigneusement et trouve environ 180° pour les triangles, 360° pour les quadrilatères et 540° pour les pentagones.

On note alors au tableau les conjectures trouvées :

1) Il semble que la somme des angles d'un triangle soit 180°.
2) Il semble que la somme des angles d'un quadrilatère soit 360°.
3) Il semble que la somme des angles d'un pentagone soit 540°.

Dans un premier temps, les mesures faites sont convaincantes pour les élèves. Le professeur doit alors faire remarquer à la classe que certains groupes trouvaient environ 180° et non 180°. Pour trancher, une démonstration s'avère donc nécessaire.

Le professeur pose alors la question : « Dans quel cas peut-on trouver la réponse sans mesurer ? ». Les réponses du carré et du rectangle viennent tout de suite. La suite est plus difficile et le professeur doit suggérer de s'intéresser au cas du triangle rectangle. La première idée des élèves est qu'un triangle rectangle est la moitié d'un rectangle et donc que la somme de ses angles est de 360°/2 c'est-à-dire 180°. Le professeur doit alors insister pour que la preuve soit expliquée avec des propriétés déjà vues.

Dans l'une des classes, un groupe fait la preuve en utilisant un demi-rectangle, des angles alternes-internes et des angles complémentaires. Dans l'autre classe, les élèves font la preuve avec un rectangle partagé en deux triangles rectangles symétriques en utilisant les propriétés de la symétrie centrale.

À la fin de la séance, les deux classes doivent rédiger cette démonstration pour la fois suivante.

Lors de la séance suivante, ce travail hors classe est corrigé. On peut noter que les démonstrations utilisant la symétrie ont été de meilleure qualité que celles utilisant la notion d'angles alternes-internes. En effet, de nombreux élèves sont partis de l'idée que la diagonale du rectangle était axe de symétrie pour le rectangle et donc partageait les angles du rectangle en deux angles de 45°. Une fois la correction effectuée, l'étude se poursuit pour un triangle quelconque. Après avoir tracé à l'extérieur du triangle soit un parallélogramme, soit un rectangle, les élèves ont l'idée d'utiliser la notion de hauteur.

On peut alors valider la propriété et passer à l'institutionnalisation.

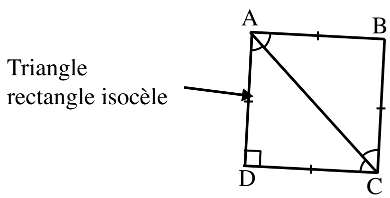
Déroulement de la seconde approche

La question posée est « Quelle est la somme des angles d'un quadrilatère ? ». Elle est étudiée en cours dialogué avec l'ensemble de la classe après un temps de recherche individuelle.

Les élèves se ramènent à des cas particuliers qu'ils connaissent bien : le carré et le rectangle. Ils conjecturent alors que la somme des angles d'un quadrilatère est de 360°. Puis le cas du losange est évoqué. Or, les angles ne sont pas connus. L'un des élèves a l'idée de partager le losange en quatre triangles rectangles.

Se pose alors la question de la somme des angles d'un triangle rectangle ?

Le professeur fait avancer l'étude en posant la question : « Dans quelle figure géométrique, peut-on obtenir un triangle rectangle ? » La classe revient naturellement sur le carré déjà évoqué et dont la trace écrite est toujours au tableau. On obtient que la somme des angles d'un triangle rectangle isocèle est de 180° en

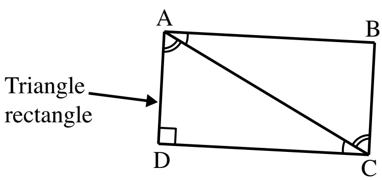


Dans un carré, une diagonale est un axe de symétrie.

Donc : $\widehat{DAC} = \dfrac{\widehat{DAB}}{2} = \dfrac{90°}{2} = 45°$.

$S_{ABC} = 45° \times 2 + 90° = 180°$.

utilisant la symétrie par rapport à la diagonale.
Cela ne suffisant pas pour répondre à la question du losange, on revient au cas du rectangle. Certains élèves veulent utiliser la symétrie concernant les diagonales, ce qui est réfuté par l'autre partie de la classe. Les séances précédentes ayant pour objet les angles alternes-internes, la démonstration est assez vite trouvée. Pour ne pas perdre le fil du raisonnement, les traces écrites au tableau et dans le cahier des élèves sont réduites à l'essentiel

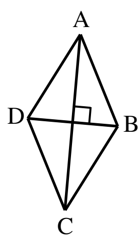


(AB)//(DC) ; $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DCA}$ sont alternes-internes ainsi que les angles $\widehat{DAC}$ et $\widehat{BCA}$.

Donc : $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$ et $\widehat{DAC} = \widehat{BCA}$.

Conclusion : $S_{ABC} = \dfrac{360°}{2} = 180°$.

Le cas du losange est alors réglé.

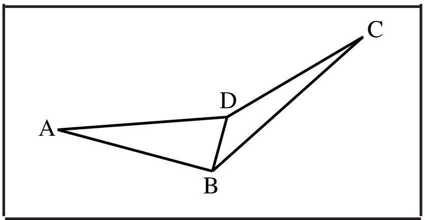


On pave le losange en quatre triangles rectangles.

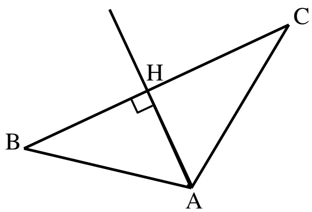
Donc : $\widehat{DAC} = \dfrac{\widehat{DAB}}{2} = \dfrac{90°}{2} = 45°$.

$S_{ABC} = 180° \times 4 - 4 \times 90° = 360°$.

On envisage alors le cas d'un quadrilatère quelconque et les élèves suivent l'idée précédente du losange et le partagent en deux triangles.



On doit alors étudier le cas du triangle quelconque et les élèves suggèrent de revenir au triangle rectangle en introduisant une hauteur.



Dans BAH : $\widehat{ABC}+\widehat{BHA}+\widehat{BAH}=180°$.

Soit $\widehat{ABC}+90°+\widehat{BAH}=180°$.

Dans CAH : $\widehat{ACB}+\widehat{AHC}+\widehat{CAH}=180°$.

Soit $\widehat{ACB}+90°+\widehat{CAH}=180°$.

D'où :

$\widehat{ABC}+90°+\widehat{BAH}+\widehat{ACB}+90°+\widehat{CAH}=360°$.

Je remarque que : $\widehat{BAH}+\widehat{HAC}=\widehat{BAC}$.

Donc : $\widehat{ABC}+\widehat{BAC}+\widehat{BCA}+90°+90°=360°$.

Conclusion : $\widehat{ABC}+\widehat{BAC}+\widehat{BCA}=180°$.

La démonstration est faite oralement et la trace écrite est faite en grande partie par le professeur. On termine cette activité par le bilan : dans un triangle, la somme des angles est égale à 180° et celle d'un quadrilatère est égale à 360°.

Bilan

Quelle que soit la question choisie, les classes ont adhéré et se sont investies dans la recherche. Il faut noter que les professeurs ont privilégié la phase de raisonnement et de recherche par rapport à la phase de rédaction.

Pour le déroulement en groupe, ceux-ci se sont constitués sans l'intervention du professeur, ce qui a occasionné un travail fluctuant suivant leur constitution. Le professeur avait prévenu qu'il voulait des traces écrites des recherches ou des pistes suivies sur la feuille A3. Certains « bons élèves » ont alors essayé de réfléchir uniquement mentalement ou sur un brouillon « annexe » pour ne pas rendre la feuille A3 avec des réponses fausses. Ceci nous a conduites à proposer, plus régulièrement, à nos classes des activités similaires pour montrer la valeur des essais dans une recherche. Ce sont les mêmes élèves qui sont mal à l'aise au début avec les narrations de recherche.

Cette étude a été prolongée lors d'un devoir maison concernant la somme des angles d'un polygone à *n* côtés.