Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART
13, rue des Garennes
63 800 Cournon d'Auvergne
ou
hochartmax@yahoo.fr

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 491 - 1

Soit F la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Montrer que pour $n \geq 1$,

$$\prod_{k=1}^{n} F_k \leq \frac{1}{n!} \exp\left(F_{n+4} - 2n - 3\right).$$

Problème 491 - 2 (Question de Fernand Canonico)

Soit P un polynôme complexe de degré $n \geq 1$. Pour $\omega \in \mathbb{C}$, soit ν_ω le nombre de solutions complexes de l'équation $P(z) = \omega$. Montrer que

$$\sum_{\omega \in \mathbb{C}} \left(n - \nu_\omega\right) = n - 1.$$

Problème 491 - 3

Trouver toutes les suites strictement croissantes d'entiers $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant les conditions suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $u_{2n} = 2u_n$,
2. si u_n est premier, n est premier.

Erratum

Je remercie Maurice Bauval (Versailles) qui me signale une erreur de frappe dans le bulletin 488. Pages 363 et 384, il faut lire $R = \frac{5}{24}\sqrt{793} \simeq 5{,}866\ 719\ 933$.

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 484-1 (question de Michel Lafond)

Résoudre dans $\mathbb{Z}^*$ l'équation $a^2 + b^3 = c^4$.

Solution de Pierre Renfer (Saint George d'Orques).

Si $(a,b,c) \in \mathbb{Q}^3$ est solution rationnelle, alors pour tout $d \in \mathbb{Z}$, le triplet (ad^6,bd^4,cd^3) est également solution rationnelle. Donc, à partir d'une solution rationnelle (a,b,c), on peut obtenir des solutions entières en prenant pour d un multiple commun des dénominateurs des fractions irréductibles a, b et c.
On cherche maintenant les solutions rationnelles. Si (a,b,c) est une solution rationnelle, alors

$$\left(\frac{a}{c^3}\right)^2 + \left(\frac{b}{c^2}\right)^3 = \left(\frac{1}{c}\right)^2.$$

On pose alors

$$x = \frac{1}{c},\ y = \frac{a}{c^3},\ z = \frac{b}{c^2}.$$

Ainsi,

$$z^3 = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y).$$

En posant $u = x + y$, on obtient $x - y = \dfrac{z^3}{u}$, puis

$$x = \frac{1}{2}\left(u + \frac{z^3}{u}\right) = \frac{u^2+z^3}{2u},$$

$$y = \frac{1}{2}\left(u - \frac{z^3}{u}\right) = \frac{u^2-z^3}{2u}.$$

On peut ainsi obtenir les solutions rationnelles à l'aide de deux paramètres rationnels u et z :

$$c = \frac{1}{x} = \frac{2u}{u^2+z^3},$$

$$a = yc^3 = \frac{4u^2\left(u^2-z^3\right)}{\left(u^2+z^3\right)^3},$$

$$b = zc^2 = \frac{4u^2 z}{\left(u^2+z^3\right)^2}.$$

Remarque. Dans le but d'obtenir des solutions entières, la multiplication par d^6 pour le terme a donne naissance à de « grandes » solutions comme semble l'indiquer le tableau ci-dessous, où apparaissent les paramètres rationnels (u,z), la solution rationnelle (a,b,c) associée, le ppcm d des dénominateurs de a, b, c et, enfin, pour des raisons de place, seulement le premier terme d^6a de la solution entière.

(u,z)	a	b	c	d	ad^6
(1, 2)	–28/729	8/81	2/9	729	–5 764 951 698 650 172
(3, 2)	36/4 913	72/289	6/17	4 913	103 047 229 854 353 368 548
(1/2, 1/2)	64/27	32/9	8/3	27	918 330 048

On peut cependant modifier les solutions précédentes (a,b,c) en $\left(\dfrac{a}{\mathrm{D}^6}, \dfrac{b}{\mathrm{D}^4}, \dfrac{c}{\mathrm{D}^3}\right)$, où l'entier D est défini par

$$\mathrm{D} = \prod_{p \text{ premier}} p^{e_p},$$

l'exposant e_p valant

$$e_p = \min\left(\left\lfloor \frac{v_p(a)}{6} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{v_p(b)}{4} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{v_p(c)}{3} \right\rfloor\right),$$

$\lfloor\ \rfloor$ désignant la partie entière et v_p la valuation p-adique. On obtient ainsi

(u,z)	a	b	c
(1, 2)	28	8	6
(3, 2)	176 868	20 808	1 734
(1/2, 1/2)	27	18	9

Pour $u = z = 4$, on obtient la jolie solution

$$6\,000^2 + 400^3 = 100^4.$$

Solution de Michel Lafond (Dijon).

On va paramétrer les solutions ainsi :

$$\begin{cases} a = \lambda^6 (\mathrm{X}-3)(\mathrm{X}^2-1)^3(\mathrm{X}-1) \\ b = 2\lambda^4 (\mathrm{X}^2-1)^2(\mathrm{X}-1) \\ c = \lambda^3 (\mathrm{X}^2-1)^2 \end{cases} \qquad (1)$$

où X est un rationnel quelconque, autre que ±1 et 3 et où λ est un rationnel convenablement choisi pour éliminer les dénominateurs dans les expressions en X.

Michel Lafond prend l'exemple de $\mathrm{X} = \dfrac{7}{2}$ pour lequel

$$\begin{cases} (\mathrm{X}-3)(\mathrm{X}^2-1)^3(\mathrm{X}-1) = \dfrac{3^6 \cdot 5^2}{2^8} \\ (\mathrm{X}^2-1)^2(\mathrm{X}-1) = \dfrac{3^4 \cdot 5^3}{2^4} \\ (\mathrm{X}^2-1)^2 = \dfrac{3^4 \cdot 5^2}{2^4} \end{cases}$$

On peut alors choisir le paramètre $\lambda = 4$ pour trouver une solution dans $\mathbb{Z}^*$:

$$7\,290\,000^2 + 162\,000^3 = 8\,100^4,$$

mais le choix $\lambda = \dfrac{4}{3}$ est plus intéressant puisqu'il élimine les puissances de 3 aux dénominateurs et fournit la surprenante solution :

$$10\,000^2 + 20\,00^3 = 300^4.$$

Pour établir la paramétrisation (1), on transforme l'équation

$$a^2 + b^3 = c^4 \tag{2}$$

en

$$\left(c^2 - a\right)\left(c^2 + a\right) = b^3. \tag{3}$$

L'entier b étant non nul, on peut poser

$$x = \frac{c^2 + a}{b^2}. \tag{4}$$

Ce rationnel est non nul, sinon $c^2 + a = b^2x$ le serait et $b^3 = \left(c^2 + a\right)\left(c^2 - a\right)$ également. L'équation (3) s'écrit alors

$$c^2 - a = \frac{b^3}{c^2 + a} = \frac{b}{x}. \tag{5}$$

Ainsi,

$$2c^2 = \left(c^2 + a\right) + \left(c^2 - a\right) = b^2x + \frac{b}{x}.$$

En multipliant par $4x^3$, on obtient

$$8x^3c^2 = 4b^2x^4 + 4bx^2,$$

soit encore

$$2x\left(2xc\right)^2 = \left(2bx^2 + 1\right)^2 - 1. \tag{6}$$

En posant

$$\mathrm{X} = 2bx^2 + 1,\ \ \mathrm{Y} = 2xc, \tag{7}$$

on a donc

$$2x\mathrm{Y}^2 = \mathrm{X}^2 - 1.$$

Comme Y n'est pas nul,

$$x = \frac{\mathrm{X}^2 - 1}{2\mathrm{Y}^2}. \tag{8}$$

On obtient successivement, à partir de (7) et (8),

$$b = \frac{\mathrm{X} - 1}{2x^2} = \frac{4\left(\mathrm{X} - 1\right)\mathrm{Y}^4}{2\left(\mathrm{X}^2 - 1\right)^2} = \frac{2\,\mathrm{Y}^4}{\left(\mathrm{X} - 1\right)\left(\mathrm{X}+1\right)^2} \tag{9}$$

et

$$c = \frac{\mathrm{Y}}{2x} = \frac{\mathrm{Y}^3}{\mathrm{X}^2 - 1}, \tag{10}$$

puis, à partir de (4), (8), (9) et (10),

$$a = b^2 x - c^2 = \frac{2Y^6}{(X-1)(X+1)^3} - \frac{Y^6}{\left(X^2-1\right)^2} = \frac{Y^6\left(X^2-2X-3\right)}{\left(X^2-1\right)^2(X+1)^2}. \qquad (11)$$

En simplifiant par X + 1,

$$a = \frac{Y^6(X-3)}{\left(X^2-1\right)^2(X+1)}. \qquad (12)$$

Puisque x est non nul, (8) montre que X est différent de ±1 et l’on peut poser

$$\lambda = \frac{Y}{X^2-1}.$$

On obtient alors la paramétrisation (1) voulue.
Montrons maintenant que l’on obtient toutes les solutions rationnelles. Tout d’abord, si X et λ sont rationnels, il est clair que a, b, c le sont aussi. Réciproquement, si a, b, c sont rationnels, (4) montre que x l’est également et (7) montre que X et Y le sont. Enfin, $\lambda = \dfrac{Y}{X^2-1}$ l’est. Si l’on se donne un couple (X,λ) de rationnels, le triplet (a,b,c) obtenu est bien solution de l’équation :

$$\begin{aligned}
a^2 + b^3 &= \lambda^{12}\left[(X-3)^2\left(X^2-1\right)^3(X-1)^2 + 8\left(X^2-1\right)^6(X-1)^3\right]\\
&= \lambda^{12}\left(X^2-1\right)^6(X-1)^2\left[(X-3)^2+8(X-1)\right]\\
&= \lambda^{12}\left(X^2-1\right)^6(X-1)^2\left[X^2+2X+1\right]\\
&= \lambda^{12}\left(X^2-1\right)^8\\
&= c^4
\end{aligned}$$

Réciproquement, une solution entière (a,b,c) étant connue, on peut trouver les paramètres (X,λ) rationnels de manière à pouvoir écrire les relations (1). En effet, de l’égalité

$$\frac{c^2}{a} = \frac{\lambda^6\left(X^2-1\right)^4}{\lambda^6(X-3)\left(X^2-1\right)^3(X-1)} = \frac{X+1}{X-3},$$

on déduit

$$X = \frac{3c^2+a}{c^2-a},$$

bien défini d’après (11). Puis la relation

$$\frac{b}{c} = 2\lambda(X-1)$$

donne, avec la relation précédente,

$$\lambda = \frac{b}{2c(X-1)} = \frac{b}{2c\dfrac{2c^2+2a}{c^2-a}} = \frac{b\left(c^2-a\right)}{4c\left(c^2+a\right)}.$$

Pour terminer, voici les premières solutions entières positives rangées selon les valeurs croissantes de c :

	a	b	c	X	λ
$28^2 + 8^3 = 6^4$	28	8	6	17	1/24
$27^2 + 18^3 = 9^4$	27	18	9	5	1/4
$63^2 + 36^3 = 15^4$	63	36	15	41/9	27/80
$1\,176^2 + 49^3 = 35^4$	1 176	49	35	99	1/140
$648^2 + 108^3 = 36^4$	648	108	36	7	1/4
$433^2 + 143^3 = 42^4$	433	143	42	5 725/1 331	14 641/28 392

En 41e position, on retrouve la solution favorite de **Michel Lafond**, à savoir

$$10\,000^2 + 20\,00^3 = 300^4.$$

Commentaire. Vincent Thill (Migennes) remarque que

$$\left(x^4 + xy^3\right)^3 + \left(y^4 + yx^3\right)^3 = \left(x + y\right)^4 \left(x^2 - xy + y^2\right)^4 .$$

Il pose alors $z^2 = x^4 + xy^3$. Par exemple, si $x = 1$ et $y = 2$, il prend $z = 3$ puis $a = z^3 = 27$, $b = y^4 + yx^3 = 18$ et $c = \left(x + y\right)\left(x^2 - xy + y^2\right) = 9$, d'où la solution

$$27^2 + 18^3 = 9^4.$$

J'ignore d'où sort la formule de factorisation proposée ci-dessus. Par ailleurs, poser $z^2 = x^4 + xy^3$ n'est pas toujours possible puisque l'on veut z entier. Cela dit, le petit programme en *Maple* ci-dessous montre que l'on obtient effectivement des solutions non triviales à l'équation :

```
test := proc(n)
local x, y, z, s ;
s := NULL;
for x to n do
for y to n do z := sqrt(x ^4+x*y^3) ;
if frac(z) = 0 then s := s, [z^3, y^4+y*x^3,
abs((x+y) * (x^2-x*y+y^2))]
end if;
end do;
end do;
s
end proc
```

En prenant ne serait-ce que $n = 10$, on trouve tout de même cinq solutions :

a	b	c
27	18	9
1 728	288	72
19 683	1 458	243
110 592	4 608	576
421 875	11 250	1 125

Problème 485-1 (Olympiades internationales 2009)

Soit n un entier strictement positif et soit $a_1,\ldots,a_k$, avec $k \geq 2$, des entiers distincts appartenant à l'ensemble $[\![1,n]\!]$ tels que n divise $a_i\left(a_{i+1}-1\right)$ pour $i \in [\![1,k-1]\!]$.

Montrer que n ne divise pas $a_k\left(a_1-1\right)$.

Solution de Franck Gautier (Pérignat lès Sarliève).

Pour $1 \leq p \leq l \leq k$, on note

$$\mathrm{A}_p^l = \prod_{i=p}^{l}\left(a_i - 1\right).$$

Si $1 \leq p < l \leq k$, alors

$$\mathrm{A}_p^l = \left(a_p - 1\right)\mathrm{A}_{p+1}^l = a_p\mathrm{A}_{p+1}^l - \mathrm{A}_{p+1}^l.$$

Puisque n divise $a_p\left(a_{p+1}-1\right)$, il divise aussi $a_p\mathrm{A}_{p+1}^l$, d'où la congruence

$$\mathrm{A}_p^l \equiv -\mathrm{A}_{p+1}^l \mod n.$$

On en déduit

$$\mathrm{A}_p^l \equiv (-1)^{l-p}\,\mathrm{A}_l^l \mod n.$$

En prenant successivement $(p,l) = (1,k)$ et $(p,l) = (2,k)$, on obtient

$$\mathrm{A}_1^k \equiv (-1)^{k-1}\left(a_k - 1\right) \mod n$$

puis

$$\mathrm{A}_2^k \equiv (-1)^{k}\left(a_k - 1\right) \mod n.$$

Comme $\mathrm{A}_1^k = \left(a_1 - 1\right)\mathrm{A}_2^k$, on trouve

$$a_1\left(a_k - 1\right) \equiv 0 \mod n.$$

Donc n divise $a_1\left(a_k-1\right)$. Pour finir, si n divisait aussi $a_k\left(a_1-1\right)$, il diviserait

$$a_1\left(a_k-1\right) - a_k\left(a_1-1\right) = a_k - a_1,$$

ce qui est impossible puisque $1 \leq a_k - a_1 \leq n - 1$.

Problème 486-1

Soit P et Q deux polynômes à coefficients entiers relatifs et sans racine complexe commune. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on désigne par u_n le pgcd de P(n) et Q(n). Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est périodique.

Solutions de Marie-Laure Chaillout (Épinay sur Orge), Franck Gautier (Pérignat lès Sarliève), Moubinool Omarjee (Paris), Pierre Renfer (Saint George d'Orques).

Les polynômes P et Q sont sans racine complexe commune, donc sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$ et donc dans $\mathbb{Q}[X]$. Il existe $A_0, B_0 \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $A_0P + B_0Q = 1$. Soit d le plus petit multiple commun des dénominateurs des coefficients des polynômes A_0 et B_0. Les polynômes $A = dA_0$ et $B = dB_0$ sont maintenant à coefficients entiers et

$$AP + BQ = d.$$

On va montrer que la suite $\left(u_n = \mathrm{pgcd}\left(P(n), Q(n)\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ admet d pour période.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, u_k divise $A(k)P(k) + B(k)Q(k) = d$ qui divise lui-même $P(n + d) - P(n)$. En particulier, u_n divise $P(n + d) - P(n)$ et aussi $P(n)$, donc u_n divise $P(n + d)$. De même, u_n divise $Q(n + d)$ et finalement, u_n divise u_{n+d}. De même, u_{n+d} divise d, donc $P(n + d) - P(n)$ et aussi $P(n + d)$, donc $P(n)$ et similairement $Q(n)$. Ainsi, u_{n+d} divise u_n et pour des raisons de signe, $u_n = u_{n+d}$.

Commentaires.

(1) L'entier d n'est pas obligatoirement la plus petite période. Par exemple, les polynômes $P = X^2 + X - 7$ et $Q = X^2 - X + 5$ sont premiers entre eux. Avec les notations précédentes, $A_0 = -\dfrac{1}{70}X - \dfrac{1}{14}$ et $B_0 = \dfrac{1}{70}X + \dfrac{1}{10}$ Ainsi, $d = 70$ et l'on peut vérifier sur un logiciel de calcul formel que la période est 35.

(2) **Franck Gautier** remarque que la réciproque est vraie, à savoir, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est périodique, les polynômes P et Q sont premiers entre eux. En effet, si les polynômes P et Q ne sont pas premiers entre eux, ils admettent un facteur commun $D \in \mathbb{Q}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1. On écrit alors $P = DP_0$ et $Q = DQ_0$ avec P_0, $Q_0 \in \mathbb{Q}[X]$ puis l'on choisit deux entiers $d_1, d_2 \in \mathbb{N}^*$ pour rendre les polynômes d_1D, d_2P_0 et d_2Q_0 à coefficients entiers. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$d_1D(n)d_2P_0(n) = d_1d_2P\,(n),$$

donc l'entier $d_1D(n)$ divise l'entier $d_1d_2P(n)$. Pour la même raison, il divise $d_1d_2Q(n)$ donc $d_1D(n)$ divise $d_1d_2u_n$. Mais d_1, d_2 sont constants et $|D(n)|$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, ce qui rend impossible la périodicité de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

(3) **Moubinool Omarjee** signale que cet énoncé a été donné à l'oral de l'ENS en 2006.