Exercices de-ci, de-là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par Mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

Jean Fromentin,
17 rue de la Roussille,
79000 NIORT

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial, une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 491-1 (Daniel Reisz – Auxerre)

(exercice d'algèbre proposé à l'Université de Cambridge en 1877)

Trois Hollandais de mes amis, Henri, Nicolas et Corneille, récemment mariés, sont venus me faire une visite avec leurs femmes Gertrude, Catherine et Anna, mais j'ai oublié le nom de la femme de chacun en particulier. Ils m'ont dit qu'ils avaient été acheter des cochons au marché. Chacun d'eux en a acheté autant que le prix qu'il a payé pour un cochon. Henri a acheté 23 cochons de plus que Catherine ; Nicolas 11 de plus que Gertrude et chaque mari a dépensé 3 guinées *(1 guinée = 21 schillings)* de plus que son épouse. Pourriez-vous me dire d'après ces renseignements le prénom de l'épouse de chacun des hommes ?

Exercice 491-2 (Jérôme Esquerré – Ramonville-Saint-Agne)

(d'après un exercice paru dans la rubrique « Affaire de logique » du Monde Magazine)

- Soient A et P deux points du plan tels que AP = 4.
  Construire un triangle ABC rectangle et isocèle en A tel que BP = 6 et CP = 2.
- À l'intérieur d'un triangle ABC rectangle et isocèle en A, P est le point tel que AP = 4, BP = 6 et CP = 2 (longueurs mesurées en cm).
  Combien mesure l'aire du triangle ABC en cm^2 ?

Exercice 491-3 (Jacques Borowczyk – Tours)

(configuration d'Armand Borgnet (1842))

Soient deux cercles (C_1) et (C_2) dont les centres O_1 et O_2 sont les extrémités d'un diamètre du cercle (C_3) de centre O_3 et dont la somme des rayons est égale au diamètre du cercle (C_3). Alors, toute tangente commune à deux de ces trois cercles ne passant pas par le point de contact des cercles (C_1) et (C_2) est tangente au troisième cercle et les arcs de cercle des cercles (C_1) et (C_2) interceptés par le cercle (C_3) ont des flèches de même longueur.

Exercice 491-4 (Georges Lion – Wallis)

(question du concours australien de mathématiques 2010)

Deux pavés $10 \times 18 \times L$ sont disposés des deux côtés d'un cylindre de longueur L pour l'empêcher de rouler. L'un des pavés a une face $10 \times L$ sur le sol tandis que l'autre a une face $18 \times L$ sur le sol. L'un des pavés dépasse en largeur de 4 unités de plus que l'autre, par rapport à la génératrice posée au sol.
Calculer le rayon R du cylindre sachant qu'il s'agit d'un entier strictement supérieur à 18.

Solutions

Exercice 488-1 (Bruno Alaplantive - Calgary)

L'association maintien le cap : Pour Les Maths !

$$\frac{\mathrm{CAP}}{\mathrm{PLM}} = \cdot\mathrm{APMEP\ APMEP\ APMEP}\ldots$$

Dans cette fraction et sa notation décimale, de période de longueur 5, chaque lettre représente un chiffre différent.
La notation est à l'anglo-saxonne avec un point à la place de la virgule et le zéro n'est pas écrit.
À l'instar de notre chère centenaire, la fraction est naturellement irréductible !
Déterminer la solution et son unicité.

Solution de Dominique Paniandy (Saint-André)

Classiquement,

$$10^5\left(\cdot\mathrm{APMEP\ APMEP\ APMEP}\ldots\right) - \left(\cdot\mathrm{APMEP\ APMEP\ APMEP}\ldots\right) = \mathrm{APMEP},$$

d'où :

$$\left(10^5 - 1\right) \times \frac{\mathrm{CAP}}{\mathrm{PLM}} = \mathrm{APMEP}$$

ou encore

$$\frac{\mathrm{CAP}}{\mathrm{PLM}} = \frac{\mathrm{APMEP}}{99999}.$$

Or $99999 = 271 \times 9 \times 41$. On se rend alors compte qu'il n'y a que quatre possibilités pour PLM, les quatre diviseurs à trois chiffres de 99999, à savoir : 123, 271, 369 et 813.

– Si PLM = 123, alors $\dfrac{CA1}{123} = \dfrac{A13E1}{99999}$, soit CA1 × 813 = A13E1, ce qui n'est manifestement pas possible.

– Si PLM = 271 ou PLM = 813, on aboutit de la même façon à une contradiction.

– Si PLM = 369, on obtient : CA3 × 271 = A39E3 et, en effectuant la multiplication CA3 par 271, on trouve : E = A + 1 si A ≠ 9, et si A = 9, E = 0 à cause de la retenue. Dressons alors le petit tableau suivant :

A	E = A + 1	A39E3	A39E3 modulo 271
0	1	3 913	119
1	2	13 923	102
2	3	23 933	85
3	4	33 943	68
4	5	43 953	51
5	6	53 963	34
6	7	63 973	17
7	**8**	**73 983**	**0**
8	9	83 993	254
9	0	93 903	137

Il y a donc une seule solution au problème posé :

$$\frac{273}{369} = \cdot 73983\ 73983\ 73983\ldots \quad \left(= \frac{91}{123}\right).$$

Autres solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Frédéric de Ligt (Montguyon), Alain Corre (Moulins), Georges Lion (Wallis), Jean-Claude Carréga (Lyon), Bernard Collignon (Coursan), Giovanni Ranieri (Melun), Jean-Louis Nicolas (Lyon), Odile Simon (La Prénessaye).

Remarque. Pierre Renfer et Jean-Louis Nicolas ont utilisé le logiciel Maple pour balayer les cas.

Nota. L'APMEP est irréductible, ma bêtise aussi très probablement (hélas ?) ; mais en tout cas cette fraction, elle, ne l'est pas !

Exercice 488-2. Am stram gram ? (d'après des olympiades australiennes de 1993)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, les sommets d'un triangle ABC sont de coordonnées entières. Les côtés ne portent aucun autre point de coordonnées entières et il n'y a qu'un seul point, G, de coordonnées entières à l'intérieur du triangle.
Prouver que G est le centre de gravité du triangle.

Solution de Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques)

Si M, N, P sont des points à coordonnées entières, le double de l'aire S du triangle MNP est un entier, car :

$$2\mathrm{S} = \left|\text{dét}\left(\overrightarrow{\mathrm{MN}},\overrightarrow{\mathrm{MP}}\right)\right| = |ad - bc|,$$

si (a,b) et (c,d) sont les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$.

Appelons triangles élémentaires les triangles qui ont des sommets à coordonnées entières et qui ne contiennent pas d'autres points à coordonnées entières à l'intérieur (au sens large).
On va prouver qu'un triangle à sommets de coordonnées entières est élémentaire si et seulement si le double de son aire vaut 1.
Le résultat de l'exercice en résultera :
Les triangles GAB, GBC et GCA sont élémentaires. Ils ont donc la même aire et le point G est bien le centre de gravité du triangle ABC.

Si un triangle à sommets entiers n'est pas élémentaire, on peut le décomposer en plusieurs triangles élémentaires et le double de son aire sera alors un entier strictement supérieur à 1.
Si au contraire, un triangle MNP est élémentaire, alors tout vecteur à coordonnées entières peut s'écrire comme combinaison linéaire à coefficients entiers de $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$.

En effet, soit Q un point à coordonnées entières, tel que : $\overrightarrow{\mathrm{MQ}} = x\overrightarrow{\mathrm{MN}} + y\overrightarrow{\mathrm{MP}}$, où l'un des deux nombres x ou y au moins ne serait pas entier. Alors le point R tel que $\overrightarrow{\mathrm{MR}} = \left(x - |x|\right)\overrightarrow{\mathrm{MN}} + \left(y - |y|\right)\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ serait un point à coordonnées entières, intérieur au triangle MNP et distinct de M, N, P. Ce qui est absurde !
En particulier le vecteur de coordonnées (1,0) est combinaison linéaire à coefficients entiers des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$, de coordonnées (a,b) et (c,d).

Ces coefficients x et y vérifient le système : $\begin{cases} ax + cy = 1 \\ bx + dy = 0 \end{cases}$

Les formules de Cramer impliquent que le déterminant principal $\delta = ad - bc$ divise d et b.
En faisant le même raisonnement avec le vecteur de coordonnées (0,1), on obtient que le déterminant $\delta = ad - bc$ divise aussi c et a.

On conclut que $|ad - bc| = 1$, sinon les segments MN et MQ contiendraient des points à coordonnées entières autres que les extrémités et le triangle MNP ne serait pas élémentaire.

Solution de Frédéric de Ligt (Montguyon) *(Pick et Pick et colégram !)*
La formule de Pick donne l'aire d'un polygone convexe dont les sommets sont placés sur les nœuds d'un quadrillage en fonction du nombre de nœuds situés sur et dans le polygone (p et i) :

$$A = \frac{p}{2} + i - 1.$$

Appliqué au triangle proposé cela donne une aire de 3/2. Si on relie l'unique point intérieur au triangle placé sur un nœud du quadrillage aux trois sommets de ce triangle, on forme ainsi trois triangles dont les intérieurs et les bords (exceptés bien sûr les sommets) ne contiennent aucun nœud du quadrillage. Leurs aires se calculent encore par la formule de Pick ; elles sont toutes égales à 1/2. Mais le centre de gravité est le seul point intérieur du triangle qui, relié aux trois sommets, fait apparaître trois triangles d'aires égales. D'où la conclusion.

Remarque : la propriété du centre de gravité évoquée est assez immédiate à établir. Il est connu que les médianes d'un triangle partagent celui-ci en six triangles d'aires égales. Associés deux par deux, on forme ainsi trois triangles d'aires égales ayant le centre de gravité comme sommet commun. Il n'existe pas d'autre point possédant cette propriété. En effet, un autre point devrait se situer sur chacune des trois parallèles aux côtés passant par le centre de gravité afin de ne pas modifier l'aire de ces petits triangles (le tiers de celle du grand triangle). Mais ces trois droites sont concourantes au centre de gravité par définition.

Autres solutions : Alain Corre (Moulins), Bernard Collignon (Coursan).

Exercice 488-3. (issu de la compétition austro-polonaise de mathématiques de 1994)
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est telle que pour tout nombre réel x, on a :

$$f(x + 19) \leq f(x) + 19 \text{ et } f(x + 94) \geq f(x) + 94.$$

Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x + 1) = f(x) + 1$.

Solution de Bernard Collignon (Coursan)

L'idée est d'établir l'égalité par la double inégalité :

$$f(x) + 1 \leq f(x + 1) \leq f(x) + 1,$$

à partir des inégalités vérifiées par la fonction f.

• $f(x + 1) \leq f(x) + 1$.

D'après l'énoncé, pour tout réel x :

$$f(x + 19) \leq f(x) + 19.$$

D'où, par récurrence simple,

$$f(x + 19k) \leq f(x) + 19k$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. En prenant $k = 5$:

$$f(x + 95) \leq f(x) + 95 \qquad (1)$$

D'autre part, pour tout réel x :

$$f(x+94) \geq f(x)+94$$

donc

$$f(x+95) \geq f(x+1)+94 \qquad (2)$$

Les inéquations (1) et (2) conduisent pour tout réel x à :

$$f(x+1)+94 \leq f(x+95) \leq f(x)+95.$$

D'où :

$$f(x+1)+94 \leq f(x)+95$$

qui donne bien

$$f(x+1) \leq f(x)+1$$

pour tout x réel.

• $f(x)+1 \leq f(x+1)$.
Pour tout entier k naturel, pour tout réel x :

$$f(x+19k) \leq f(x)+19k.$$

En prenant $k = 89$, $19 \times 89 = 1691$ et on a :

$$f(x+1691) \leq f(x)+1691.$$

En appliquant cette inégalité à $x+1$, on a pour tout réel x :

$$f(x+1692) \leq f(x+1)+1691 \qquad (3)$$

D'autre part, pour tout réel x et tout entier naturel k' :

$$f(x+94k') \geq f(x)+94k'.$$

En prenant $k' = 18$, $18 \times 94 = 1692$ et on a pour tout x réel :

$$f(x+1692) \geq f(x)+1692 \qquad (4)$$

Les inéquations (3) et (4) conduisent à :

$$f(x+1692) \leq f(x+1692) \leq f(x+1)+1691.$$

D'où :

$$f(x+1692) \leq f(x+1)+1691$$

qui donne bien

$$f(x+1) \leq f(x+1)$$

pour tout x réel.

Remarque : Les nombres 19 et 94 sont premiers entre eux, ce qui permet de trouver des solutions aux équations diophantiennes $19x - 94y = 1$ et $94x - 19y = 1$ et permet d'arriver à chaque inégalité.
La première $19x - 94y = 1$ admet pour solution particulière le couple $(k,k') = (5,1)$.
La seconde $94x - 19y = 1$ admet pour solution particulière le couple $(k,k') = (18,89)$.

Autres solutions : Jérôme Alary (Unieux), Alain Corre (Moulins), Frédéric de Ligt (Montguyon), Georges Lion (Wallis), Mathilde Lahaye-Hitier (Saint-Bruno de

Montarville – Canada), Jean-Claude Carréga (Lyon), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Giovanni Ranieri (Melun).

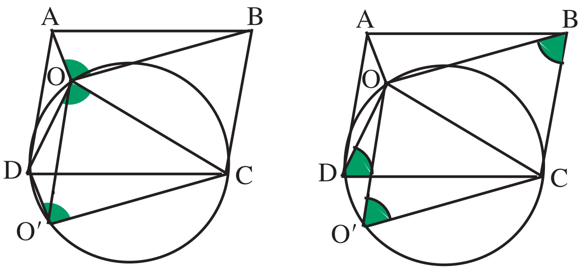
Exercice 488-4. L'exercice de géométrie *(d'après des olympiades canadiennes de 1997)*
Un parallélogramme ABCD et un point intérieur O sont tels que

$$\widehat{AOB} + \widehat{COD} = 180°.$$

Prouver que l'on a $\widehat{OBC} = \widehat{ODC}$.

Solution de Jean-Yves Le Cadre (Saint Avé)

Soit O′ l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$. Alors $\widehat{AOB} = \widehat{DO'C}$ et par conséquent $\widehat{DOC}$ et $\widehat{DO'C}$ sont supplémentaires et le quadrilatère ODO′C est inscriptible.



$\widehat{ODC} = \widehat{OO'C}$ (angle inscrit du même côté $[OC]$) et $\widehat{OO'C} = \widehat{OBC}$ (OBCO′ parallélogramme).
On a bien :

$$\widehat{OBC} = \widehat{ODC}.$$

Remarque : Partant de $\widehat{OBC} = \widehat{ODC}$, on montrerait de même que

$$\widehat{AOB} + \widehat{COD} = 180°.$$

Autres solutions : Frédéric de Ligt (Montguyon), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Bernard Collignon (Coursan).