

L'éclosion du dragon

Marc Roux(*)

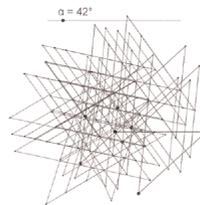
À la lecture de l'article de Catherine Combelles « Deux codages de la courbe du dragon » (BV n° 489), par simple curiosité, j'ai eu envie de voir ce qu'il se passe si on remplace l'angle droit par un angle α quelconque ; pour cela j'ai réalisé deux fichiers GeoGebra, que l'on trouvera sur le site de l'APMEP. L'un, « Figure dragon flexible animé », permet de voir les premiers morceaux de la courbe se mettre en place en pivotant ; l'autre, « Figure dragon flexible », permet de faire apparaître une à une les différentes parties de cette courbe, ainsi que divers objets dont il sera question plus bas. Toutes les figures qui illustrent cet article sont des photos d'écran de ce fichier. J'ai fait varier l'angle α , et je n'ai pas été déçu par le spectacle, que vous pouvez voir en ouvrant ledit fichier.

1. Vie et mort du dragon.

Rappelons que, partant d'un segment de longueur 1, la courbe se construit par l'adjonction à la partie déjà construite de son image par la rotation de centre son dernier point, et d'angle α . Ayant procédé ainsi, par exemple, sept ou huit fois, si le curseur α reste à zéro, sachant qu'une rotation d'angle nul est l'application identique, nous ne serons pas étonnés de ne voir rien d'autre que le segment originel : c'est le germe du dragon. Faisons alors lentement croître α : on distingue d'abord une sorte de petit éventail à deux centres (fig. 1) :



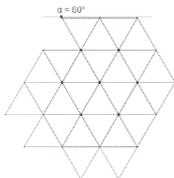
Puis, α croissant, on obtient un embrouillamini anguleux, cantonné à une partie restreinte du plan (fig. 2) :



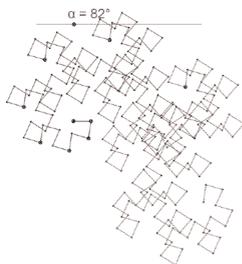
Si, à ce stade, on ajoute une étape de la construction (en tirant vers le bas la dernière ligne du tableur), on constate que la place occupée par la courbe s'accroît très faiblement ; on peut légitimement se demander si la courbe entière (après une infinité d'étapes) resterait bornée ou non ; le dragon est en gestation, dans son œuf.

(*) marc.roux15@wanadoo.fr

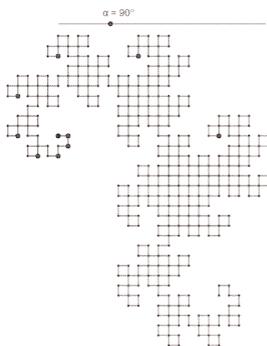
Ensuite α atteint 60° , et tout change brusquement : la courbe prend la forme d'une série de triangles équilatéraux adjacents les uns aux autres ; une étape supplémentaire fait apparaître d'autres triangles identiques, extérieurs aux précédents : on peut penser que la courbe complète va former un réseau infini de ces triangles ; c'est l'explosion de la coquille de l'œuf ! (fig. 3)



Pour α entre 60° et 90° , on a une ligne confuse et « nerveuse » à la fois, qui prend manifestement le chemin de l'infini, avec de nombreux retours en arrière et recoupements, et qui n'est pas sans rappeler certaines peintures abstraites ; le jeune dragon semble « se chercher » (fig. 4) :

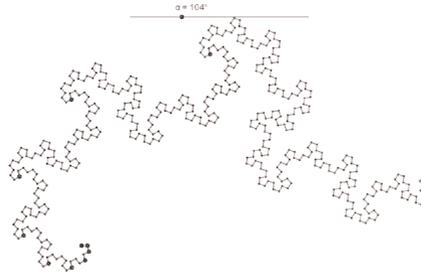


Pour $\alpha = 90^\circ$, le dragon atteint sa position d'équilibre classique, dont a parlé Catherine, et qui tient une place non négligeable dans la littérature (tapez « Courbe du dragon » dans un moteur de recherche), formant un réseau de carrés complets ou non (fig. 5) :

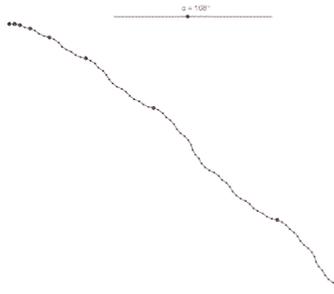


Pour α obtus, tout devient limpide : une ligne simple et belle, sans aucun recoupement⁽¹⁾, qui sort du cadre en sinuant harmonieusement (fig. 6) :

(1) Semble-t-il... Voir 4.



Enfin, α croissant toujours, le dragon s'étire, et se rapproche de la rigidité cadavérique de la simple demi-droite qu'il deviendra pour $\alpha = 180^\circ$ (fig. 7) :



2. Des conjectures.

J'appelle « dragon d'angle α », et je note C_α , la ligne brisée infinie $A_0A_1\dots A_i\dots$ obtenue ainsi: $[A_0A_1]$ est un segment de longueur 1 ; pour tout n entier, $A_{2^n} \dots A_{2^{n+1}}$ est l'image de $A_{2^n} \dots A_0$ par la rotation de centre A_{2^n} , d'angle α .

$C_{-\alpha}$ étant évidemment symétrique de C_α par rapport à la droite (A_0A_1) , on supposera $0 \leq \alpha \leq \pi$.

J'ai examiné attentivement et longuement toutes sortes de cas de figure, à l'écran ; outre les remarques ci-dessus, j'ai détecté des alignements, des parallélismes, des ressemblances de formes, etc., ce qui m'a conduit à émettre les conjectures qui suivent ; je les donne dans l'ordre où je les ai découvertes, qui ne sera pas celui de leurs démonstrations ; en effet plusieurs d'entre elles ne me sont apparues qu'au cours de tentatives de démonstrations de H1, au cours desquelles j'ai griffonné bien des dessins et bien des remarques sur bien des impressions d'écrans, et j'ai ajouté divers objets sur le fichier ; je tiens à souligner que tout ceci aurait été irréalisable sans le logiciel⁽²⁾ :

(2) Ici j'ai particulièrement utilisé les possibilités du *tableur* de GeoGebra, qui offre la particularité d'accepter dans ses cellules, non seulement des nombres ou des textes, mais *toutes les sortes d'objets* que reconnaît le logiciel : ici les cellules de la colonne A contiennent chacune une *liste de points*, celles de la colonne E une *liste de segments*, etc. Ceux de ces objets qui ont un caractère géométrique s'affichent automatiquement dans la fenêtre graphique.

H1 : Si $\alpha > \frac{\pi}{2}$, alors C_α n'a aucun point double.

H2 : Si $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, alors C_α a une infinité de points doubles.

H3 : C_α est bornée si et seulement si $\alpha < \frac{\pi}{3}$.

H4 : Pour tout n , $A_{2^{n+1}-2^{n-1}} \dots A_{2^{n+1}+2^{n-1}}$ est l'image de $A_{2^{n-1}} \dots A_{2^n+2^{n-1}}$ par une translation.

H5 : La ligne brisée $A_0 A_2 \dots A_{2^i} \dots$ est semblable à $A_0 A_1 \dots A_i \dots$; plus généralement $A_0 A_{2^k} \dots A_{2^k \times i} \dots$ est semblable à $A_0 A_1 \dots A_i \dots$.

H6 : Les points A_{2^n} (centres des rotations de construction de la courbe) sont sur une spirale dont on pourra trouver une représentation paramétrique.

3. Des démonstrations.

– Démonstration de H4 :

La ligne brisée orientée $A_{2^{n+1}-2^{n-1}} \dots A_{2^{n+1}}$ est par construction image de $A_{2^{n-1}} \dots A_0$ par la rotation d'angle α , de centre A_{2^n} ; $A_{2^{n+1}} \dots A_{2^n}$ est également image de $A_{2^{n-1}} \dots A_0$ par une rotation d'angle α (de centre $A_{2^{n+1}}$), donc $A_{2^{n-1}} \dots A_0$ est image de $A_{2^{n+1}} \dots A_{2^n}$ par une rotation d'angle $-\alpha$; la composée de deux rotations d'angles opposés est une translation, donc $A_{2^{n+1}-2^{n-1}} \dots A_{2^{n+1}}$ est image de $A_{2^{n+1}} \dots A_{2^n}$ par une translation t_1 ; le vecteur de t_1 est $\overline{A_{2^n} A_{2^{n+1}}}$.

De même $A_{2^{n+1}} \dots A_{2^{n+1}+2^{n-1}}$ est image par la rotation d'angle α et de centre $A_{2^{n+1}}$ de $A_{2^{n+1}} \dots A_{2^{n+1}-2^{n-1}}$, qui est elle-même image par la rotation d'angle α et de centre A_{2^n} de $A_0 \dots A_{2^{n-1}}$; donc $A_{2^{n+1}} \dots A_{2^{n+1}+2^{n-1}}$ est image de $A_0 \dots A_{2^{n-1}}$ par une rotation d'angle 2α ; pour les mêmes raisons $A_{2^n} \dots A_{2^n+2^{n-1}}$ est image de $A_0 \dots A_{2^{n-1}}$ par une rotation d'angle 2α , donc $A_0 \dots A_{2^{n-1}}$ est image de $A_{2^n} \dots A_{2^n+2^{n-1}}$ par une rotation d'angle -2α , et $A_{2^{n+1}} \dots A_{2^{n+1}+2^{n-1}}$ est image de $A_{2^n} \dots A_{2^n+2^{n-1}}$ par une translation t_2 ; le vecteur de t_2 est encore $\overline{A_{2^n} A_{2^{n+1}}}$, donc $t_2 = t_1$; cette translation transforme donc $A_{2^{n-1}} \dots A_{2^n+2^{n-1}}$ en $A_{2^{n+1}-2^{n-1}} \dots A_{2^{n+1}+2^{n-1}}$. CQFD.

– Démonstration de H5 :

Considérons le triangle $A_0A_1A_2$: il est isocèle ; posons $\beta = (\overline{A_0A_1}, \overline{A_0A_2}) = \frac{\alpha - \pi}{2}$

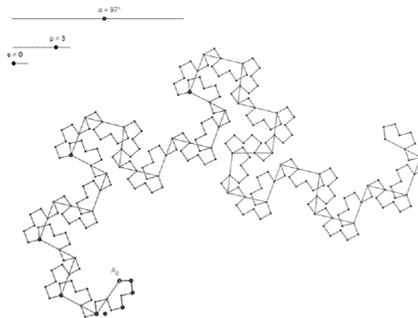
et $q = A_0A_2 = 2 \cos \beta$ ($\beta \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$, donc $q \geq 0$) ; la similitude S de centre A_0 , de

rapport q , d'angle β transforme $[A_0A_1]$ en $[A_0A_2]$; elle transforme également (le lecteur le vérifiera facilement) la ligne brisée $A_0A_1A_2$ en $A_0A_2A_4$.

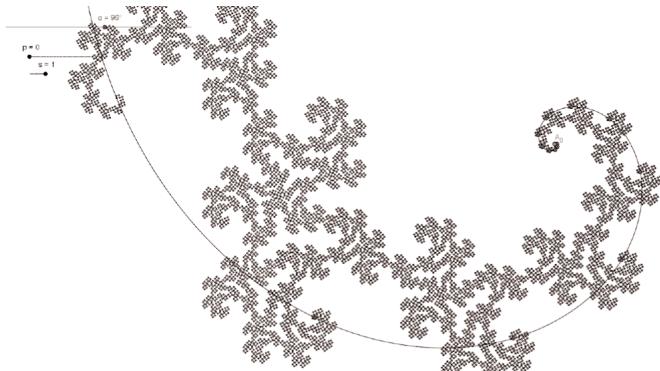
Supposons alors (hypothèse de récurrence) que S transforme $A_0A_1A_2 \dots A_{2^{n-1}}$ en $A_0A_2A_4 \dots A_{2^n}$ ($n \geq 1$). $A_{2^{n+1}}A_{2^{n+1}-2} \dots A_{2^{n+2}}A_{2^n}$ est semblable à $A_0A_2 \dots A_{2^n}$ (par rotation de centre A_{2^n} , d'angle α), qui est elle-même semblable à $A_0A_1A_2 \dots A_{2^{n-1}}$ (par S), qui est elle-même semblable à $A_{2^n}A_{2^{n-1}} \dots A_{2^{n-1}}$ (par rotation de centre $A_{2^{n-1}}$, d'angle $-\alpha$). Donc $A_{2^n}A_{2^{n+2}} \dots A_{2^{n+1}}$ est image de $A_{2^{n-1}}A_{2^{n-1}+1} \dots A_{2^n}$ par la similitude S' composée des trois précédentes ; S' a pour rapport $1 \times q \times 1 = q$, pour angle $\alpha + \beta - \alpha = \beta$.

S et S' ont même rapport et même angle, et transforment toutes deux $A_{2^{n-1}}$ en A_{2^n} . Donc elles ont même centre, et sont égales. S transforme donc $A_0A_1A_2 \dots A_{2^n}$ en $A_0A_2A_4 \dots A_{2^{n+1}}$. Ceci étant vrai pour tout n , S transforme la ligne brisée infinie $C_\alpha = A_0A_1A_2 \dots A_k \dots$ en $A_0A_2A_4 \dots A_{2k} \dots$.

On montre de même, par récurrence, que S^n transforme C_α en $A_0A_{2^n}A_{2^{n+2}} \dots A_{k \times 2^n} \dots$. Sur le fichier GeoGebra, on peut afficher ces lignes, pour $n = 1, 2, 3$ ou 4 , en réglant le curseur p sur 1, 2, 3 ou 4 (fig 8) :



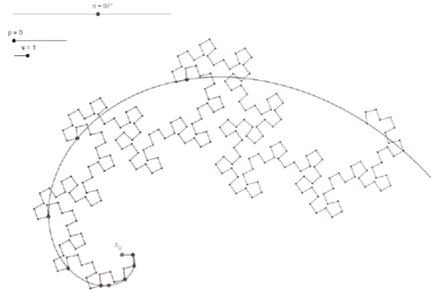
Remarque : Réciproquement, S^{-1} (similitude de centre A_0 , de rapport $\frac{1}{q}$, d'angle $-\beta$) transforme C_α en la ligne brisée obtenue en remplaçant chaque segment $A_i A_{i+1}$ par une ligne brisée $A_i B_i A_{i+1}$ vérifiant $A_i B_i = A_{i+1} B_i$ et $(\overline{A_i A_{i+1}}, \overline{A_i B_i}) = +\beta$ ou $-\beta$ selon la parité de i . En itérant indéfiniment cette opération, on obtient une courbe auto-similaire, c'est-à-dire une fractale. Chaque itération remplace un segment par deux segments, de longueur q fois plus petite, la dimension fractale de cette courbe est donc $\frac{\ln 2}{\ln q} = \frac{\ln 2}{\ln(2 \cos \beta)}$; on remarque que si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, donc $\beta = \frac{\pi}{4}$, cette dimension est 2 : le dragon « classique » couvre le plan (cf. Wikipedia, article Courbe du dragon) ; mais si $\alpha > \frac{\pi}{2}$, ce n'est plus le cas ; quand α tend vers π , β tend vers 0 et la dimension tend vers 1, ce qui était prévisible puisque est C_π une demi-droite. La figure 8bis donne un aperçu de cette fractale :



– **Démonstration de H6** : c'est un corollaire direct de H5 : d'après ce qui précède, A_{2^n} a pour coordonnées polaires $(q^n; n\beta)$, dans le repère orthonormé direct d'origine A_0 , de premier vecteur $\overline{A_0 A_1}$; il est donc sur la spirale représentée par :

$$\begin{cases} \rho = q^i \\ \theta = \beta \cdot i \end{cases}, \text{ ou } \rho = q^{\frac{\theta}{\beta}}.$$

Cette courbe, sur le fichier GeoGebra, sera affichée en mettant le curseur s sur 1 (fig 9) :



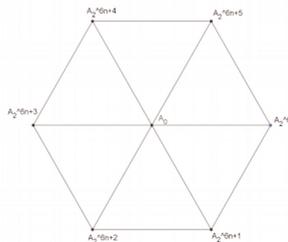
– **Démonstration de H3** : Notons δ_n la distance de A_0 à A_{2^n} . $\delta_0 = A_0A_1 = 1$.

D'après la démonstration de H5, $\delta_n = q^n = (2 \cos \beta)^n$.

$(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de premier terme $\delta_0 = 1$, de raison $q = 2 \cos \beta$; q varie de 0 (pour $\alpha = 0$) à 2 (pour $\alpha = \pi$).

- Si $\alpha > \frac{\pi}{3}$, c'est-à-dire $-\frac{\pi}{3} < \beta < 0$, alors $q > 1$: δ_n tend vers $+\infty$ avec n , la courbe n'est donc pas bornée.

- Si $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ($\beta = -\frac{\pi}{3}$), alors $q = 1$: pour tout n , $\delta_n = 1$. La similitude S est alors la rotation de centre A_0 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$; $A_1, A_2, A_{2^2}, \dots, A_{2^5}$ sont donc les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle de centre A_0 , de rayon 1, parcouru dans le sens négatif... ; et tous les points A_{2^n} (centres des rotations qui construisent la courbe) sont confondus avec ces sommets : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \leq 6$, $A_{2^{6n+p}} = A_{2^p}$ (fig10) :



- Si $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ ($-\frac{\pi}{2} < \beta < -\frac{\pi}{3}$), alors $q < 1$: la suite $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 ; les points A_{2^n} tendent vers A_0 .

Dans les deux derniers cas, on ne peut pas conclure directement quant au caractère borné ou non de la courbe.

Soit M_n le maximum des distances A_0A_λ , pour $0 \leq \lambda \leq 2^n$; on a $M_n \geq \delta_n$, et $M_n \geq 1$ (car $A_0A_1 = 1$). Soit k un entier, $0 \leq k \leq 2^{n+1}$:

- Si $k \leq 2^n$, alors $A_0A_k \leq M_n$;
- Si $k > 2^n$, alors A_k est image, par la rotation de centre A_{2^n} , d'angle α , d'un point $A_{k'}$ avec $k' < 2^n$, donc $A_{2^{n+1}}A_k = A_0A_{k'} \leq M_n$;

$$\text{donc } A_0A_k \leq A_0A_{2^{n+1}} + A_{2^{n+1}}A_k \leq \delta_{n+1}M_n ;$$

$$\text{d'où } M_{n+1} \leq \delta_{n+1} + M_n, \text{ ou } M_{n+1} - M_n \leq \delta_{n+1}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} M_n - 1 &= M_n - M_0 = M_1 - M_0 + M_2 - M_1 + \dots + M_n - M_{n-1} \\ &\leq \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n = q + q^2 + \dots + q^n. \end{aligned}$$

$$M_n \leq 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

Si $\alpha < \frac{\pi}{3}$, alors $q < 1$, donc $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \leq \frac{1}{1 - q}$: la courbe C_α est bornée.

Remarque : $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante par construction ; sa borne supérieure est donc égale à sa limite ; nous ne chercherons pas à expliciter cette limite ; on peut néanmoins noter que M_n dépend continûment de α (et peut donc s'écrire $M_n(\alpha)$), puisque c'est le maximum des distances A_0A_k , qui pourraient s'exprimer rationnellement en fonction de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$; si nous notons $B(\alpha)$ la borne supérieure, on a donc : $B(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n(\alpha)$; mais le calcul ci-dessus ne prouve pas

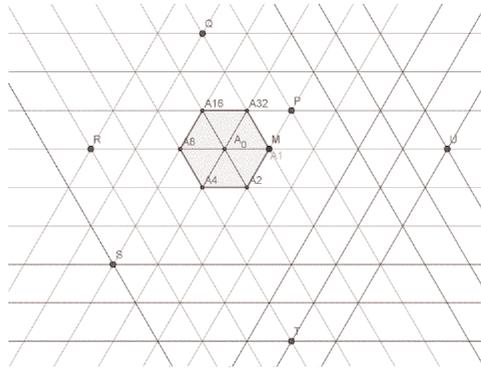
que que la convergence de la suite de fonctions $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers la fonction B soit uniforme ; on ne peut donc rien conclure quant à la continuité de celle-ci.

- Si $\alpha = \frac{\pi}{3}$, toute rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre l'un des sommets de l'hexagone $A_1A_2A_4A_8A_{16}A_{32}$ transforme n'importe quel point A_k de la courbe en un point $A_{k'}$ (puisque il existe n tel que $2^n > k$ et tel que A_{2^n} que soit confondu avec ce sommet).

La rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$, de centre A_{32} transforme A_1 en P ;

la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$, de centre A_8 transforme P en Q ;

la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$, de centre A_2 transforme Q en R (fig11) :



On lit sur le dessin, et un calcul simple montrerait, que $A_0R = 3$; de même la composée des rotations successives d'angle $\frac{\pi}{3}$, de centres A_4, A_1, A_{16} transforme R en U tel que $A_0U = 5$; en itérant ce procédé, on obtiendra une suite de points de la courbe sur la demi-droite $[A_0A_1)$, dont la distance à A_0 est en progression arithmétique de raison 4, donc tend vers l'infini : la courbe n'est pas bornée.

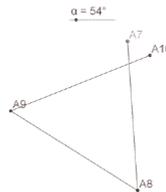
Remarque : ce qui précède incite à conjecturer que lorsque α tend vers $\frac{\pi}{3}$ par valeurs inférieures, $B(\alpha)$ (borne supérieure de A_0A_k) tend vers $+\infty$; je n'essaierai pas de démontrer cette conjecture.

– Démonstration de H2 :

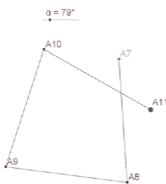
Par construction de la courbe,

$$\left(\overline{A_8A_7}, \overline{A_8A_9}\right) = \left(\overline{A_9A_8}, \overline{A_9A_{10}}\right) = \left(\overline{A_{10}A_9}, \overline{A_{10}A_{11}}\right) = \alpha ;$$

si $\alpha < \frac{\pi}{3}$, le segment $[A_7A_8]$ coupe donc $[A_9A_{10}]$ (fig12) :



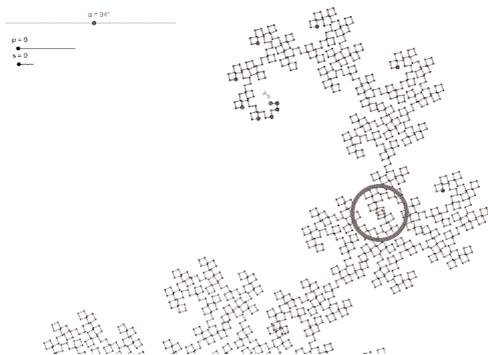
et si $\frac{\pi}{3} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, $[A_7A_8]$ coupe $[A_{10}A_{11}]$ (fig13) :



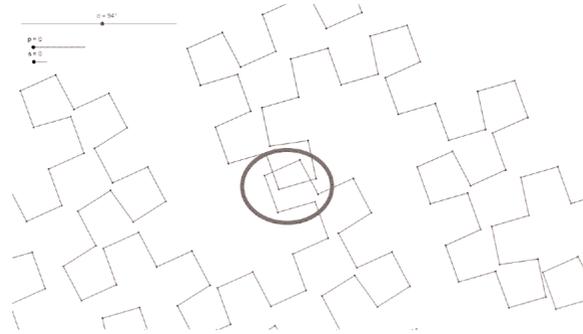
Donc si $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ il existe au moins un point double dans $A_0 \dots A_{2^4}$; or s'il existe m points doubles dans $A_0 \dots A_{2^n}$, il en existe autant dans $A_{2^n} \dots A_{2^{n+1}}$, qui est son image par rotation, donc il en existe $2m$ dans $A_0 \dots A_{2^{n+1}}$; il y a donc une infinité de points doubles dans C_α .

4. Un rebondissement inattendu

J'ai passé plusieurs semaines à tenter de démontrer H1, à savoir que le dragon est sans point double dès que $\alpha > \frac{\pi}{2}$; j'ai échafaudé des dizaines de méthodes « géniales », qui « coinçaient » toutes quelque part ; j'ai soumis le problème à des collègues ; j'ai cherché sur Internet ; jusqu'au jour où j'ai remarqué sur mon écran un A_i , de rang assez grand (supérieur à 500), qui frôlait un des segments de bien près (α étant réglé sur 94°) ; pris d'un doute, j'ai laissé tourner GeoGebra le temps nécessaire pour doubler encore le nombre de points ; et j'ai obtenu ceci (fig15) :



Déjà convaincu de mon erreur, pour plus de sûreté j'ai fait un zoom (fig15bis) :



J'ai eu envie de prétendre que ceci était probant, et d'affirmer sans autre démonstration : **la conjecture H1 est fautive** ; il existe des points doubles pour

certaines valeurs de α supérieures à $\frac{\pi}{2}$. Cependant une petite voix me murmurait :

« *Et si c'était une erreur d'arrondi ? Le logiciel travaille avec des développements décimaux limités ; serait-il possible qu'après n rotations, les approximations accumulées fassent paraître sécants des segments qui ne le sont pas ?* ». C'est ici que Jean-Pierre Friedelmeyer m'apporta son précieux secours : un algorithme de calcul de l'affixe des points A_i pour tout i , grâce auquel il démontre l'existence de points d'auto-intersection dans le cas où α mesure 94° (voir annexe).

Remarquons que si, pour une certaine valeur de α , il existe un point double, alors il en existe une infinité (même démonstration que pour H2).

Il reste néanmoins des **questions ouvertes** : il est clair que la courbe est sans point double pour $\alpha = \pi$, puisqu'elle se réduit alors à une demi-droite ; *quelle est la borne supérieure des α pour lesquels il existe des points doubles ? Y a-t-il des points doubles pour tout α inférieur à cette borne ? Quand il y a des points doubles, où trouver le premier d'entre eux ? (à titre indicatif, pour $\alpha = 96^\circ$, on n'en rencontre aucun sur les 4 096 premiers segments...)*

Peut-être un de nos lecteurs y répondra-t-il ?

5. Le dragon entrera-t-il dans nos classes ?

Tout ce qui précède n'utilise que des notions qui sont ou ont été aux programmes de collège ou lycée : translations, rotations, trigonométrie élémentaire, suites géométriques, ... ; mais le parti-pris de réduire à presque rien, dans les nouveaux programmes, la géométrie non repérée, donne à cette étude un côté désuet, voire ringard. Notre dragon peut pourtant, me semble-t-il, trouver une petite place dans l'option MPS ; mais surtout, il peut être un support à des recherches d'*algorithmes* pour sa construction ; en fait sa définition est en elle-même un algorithme ! Algorithme à mettre en œuvre avec divers logiciels comme SAGE (cf. article de Catherine Combelles), GeoGebra (voir ci-dessus et les fichiers en ligne) ou bien d'autres, mais aussi pourquoi pas *à la main*, avec règle, compas et rapporteur, et ceci dès les petites classes. Algorithmique aussi est la démarche de J.P. Friedelmeyer, dans l'annexe qui suit.

Outre ceux rapportés par C. Combelles, on peut trouver bien des travaux d'élèves sur le dragon « classique » (avec angles droits) ; j'ai particulièrement admiré la remarquable démonstration⁽³⁾, par deux élèves de Première S, du fait que deux de ses segments ne se recouvrent jamais. Pourquoi pas des réalisations analogues concernant le dragon d'angle quelconque ?

Quel que soit le cadre, la construction et l'utilisation de la figure dynamique, comme je l'ai fait pour élaborer cet article, me semblent constituer un bon exemple de la fécondité de l'outil informatique pour dégager, contrôler et invalider des conjectures ; et ma mésaventure avec H1 illustre bien le fait, trop souvent négligé par nos élèves, qu'il faut se méfier des « évidences », qu'une affirmation n'est jamais certaine sans démonstration.

Annexe, par Jean-Pierre Friedelmeyer

Prenons l'origine en A_0 et soit a_i l'affixe du point A_i . Posons $u = e^{i\alpha}$ et R_n la rotation de centre A_{2^n} et d'angle α . On a ainsi $A_2 = R_0(A_0)$, donc $a_2 - a_1 = u(a_0 - a_1)$ ou encore $a_2 = 1 - u$.

Plus généralement $A_{2^{n+1}} = R_n(A_0)$,

donc $a_{2^{n+1}} - a_{2^n} = u(a_0 - a_{2^n})$ et $a_{2^{n+1}} = (1 - u)a_{2^n}$.

De sorte que, par récurrence sur n , l'affixe de A_{2^n} est $(1 - u)^n$.

Pour un point d'indice i quelconque, $2^n < i \leq 2^{n+1}$, on a de même $A_i = R_n(A_j)$ où $j = 2^{n+1} - i$; de sorte que pour i tel que $2^n < i \leq 2^{n+1}$, on a :

$$a_i = (1 - u)^{n+1} + ua_j \text{ avec } i + j = 2^{n+1}.$$

On peut donc calculer a_i de proche en proche, le calcul étant relativement rapide même pour des grandes valeurs de i puisque l'on passe de l'intervalle $]2^n, 2^{n+1}]$ à l'intervalle $[0, 2^n[$.

Dans la pratique, on peut effectuer un algorithme portant uniquement sur des soustractions, si l'on écrit les coefficients en système binaire.

Soit par exemple à calculer l'affixe pour $i = 24\,793$ (nombre pris au hasard). On a $2^{14} < i < 2^{15}$ et $i = 110\,000\,011\,011\,001$. Je fais successivement :

$$\begin{array}{r} 1\,000\,000\,000\,000\,000 \\ - 110\,000\,011\,011\,001 \\ \hline 1\,111\,100\,100\,111 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{soit } 2^{15} = 32\,768 \\ \text{soit } 24\,793 \\ \text{soit } 7\,975 \end{array}$$

(3) http://mathenjeans.free.fr/adh/articles/2008/Bobigny_2008/coubedragon_bobigny_2008.pdf ; ou http://www.palais-decouverte.fr/fileadmin/fichiers/infos_sciences/mathematiques/textes/formes_matematiques_revue/357_jui_aout_2k8.pdf

1 000 000 000 000 000	2^{13}	8 192
- 110 000 011 011 001		- 7 975
= 11 011 111		= 217
100 000 000	2^8	256
- 11 011 111		- 217
= 100 111		= 39
1 000 000	2^6	64
- 100 111		- 39
= 11 001		= 25
100 000	2^5	32
- 11 001		- 25
= 111		= 7
1 000	2^3	8
- 111		- 7
= 1		= 1

D'où, en appliquant la formule pour a_i successivement, on obtient l'affixe :

$$a_{24793} = (1-u)^{15} + ua_{7975}$$

$$a_{7975} = (1-u)^{13} + ua_{217}$$

$$a_{217} = (1-u)^8 + ua_{39}$$

$$a_{39} = (1-u)^6 + ua_{25}$$

$$a_{25} = (1-u)^5 + ua_7$$

$$a_7 = (1-u)^3 + ua_1$$

et en regroupant le tout :

$$a_{24793} = (1-u)^{15} + u(1-u)^{13} + u^2(1-u)^8 + u^3(1-u)^6 + u^4(1-u)^5 + u^5(1-u)^3 + u^6$$

Appliquant cet algorithme au cas évoqué par Marc de α mesurant 94° , on trouve la valeur suivante de a_{445} et a_{701} après avoir conjecturé graphiquement les indices probables d'auto-intersection :

$$a_{445} = 1 - 8u + 30u^2 - 68u^3 + 105u^4 - 110u^5 + 78u^6 - 35u^7 + 9u^8 - u^9$$

$$a_{701} = 1 - 9u + 37u^2 - 91u^3 + 148u^4 - 166u^5 + 133u^6 - 76u^7 + 31u^8 - 8u^9 + u^{10}$$

Les valeurs approchées s'en déduisent sans cumul d'erreurs d'approximation, sinon celles liées aux additions, puisque $u^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$.

Pour les indices entourant 445 ou 701, on n'est pas obligé de refaire un calcul complet. Il suffit de remarquer par exemple que $a_{i+1} - a_i = u(a_{j-1} - a_j)$ jusqu'à arriver à $a_2 - a_1 = -u$.

On trouve ainsi

$$a_{446} = a_{445} - u^5; a_{447} = a_{446} + u^4; a_{448} = a_{447} - u^3; a_{449} = a_{448} + u^2; a_{444} = a_{445} - u^4;$$

$$a_{702} = a_{701} - u^7; a_{703} = a_{703} + u^6; a_{704} = a_{703} - u^5; a_{700} = a_{701} - u^6;$$

D'où les valeurs approchées à 10^{-6} près :

$$a_{445} = 16,798\ 876 - 16,927\ 971\ i \quad a_{701} = 18,154\ 345 - 17,990\ 079\ i$$

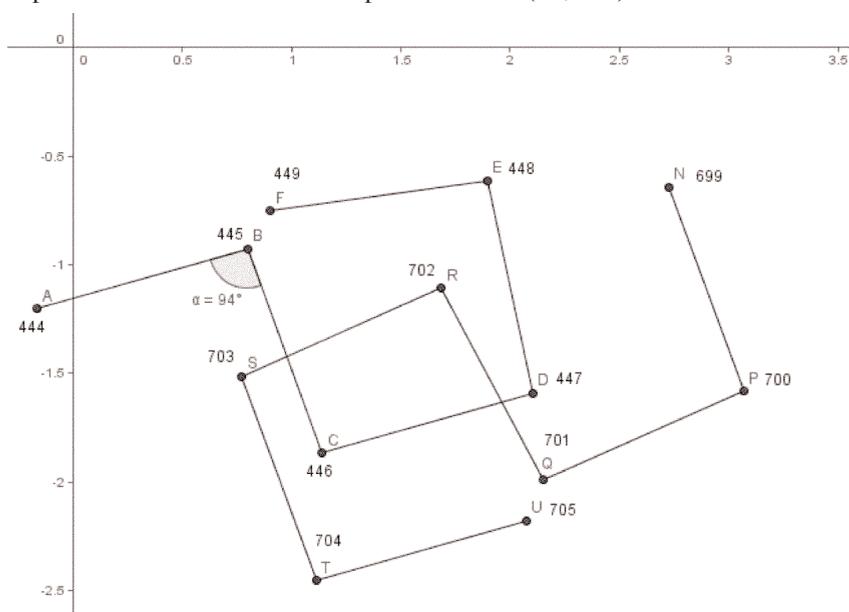
$$a_{446} = 17,140\ 896 - 17,867\ 663\ i \quad a_{702} = 17,684\ 873 - 17,107\ 131\ i$$

$$a_{447} = 18,102\ 158 - 17,592\ 025\ i \quad \text{et} \quad a_{703} = 16,771\ 133 - 17,513\ 868\ i$$

$$a_{448} = 17,894\ 247 - 16,613\ 878\ i \quad a_{704} = 17,113\ 348 - 18,453\ 560\ i$$

$$a_{444} = 15,837\ 614 - 17,203\ 608\ i \quad a_{705} = 19,067\ 900 - 17,583\ 342\ i$$

et leur placement relativement à un repère décalé de $(16, -16)$:



Remarquons par ailleurs que $a_{701} = R_9(a_{323})$; $a_{323} = R_8(a_{189})$; $a_{189} = R_7(a_{67})$,
mais aussi $a_{445} = R_8(a_{67})$.

Donc $a_{701} = R_9 \circ R_8 \circ R_7 \circ R_8^{-1}(a_{445}) = R(a_{445})$ où R est une rotation d'angle 2α et de centre déterminé en composant successivement $R_7 \circ R_8^{-1}$ qui est une translation de vecteur d'affixe \bar{V} ; puis $R_9 \circ R_8$ qui est une rotation d'angle 2α et de centre c d'affixe $\frac{(1-u)^8}{1+u}$ (ces valeurs étant obtenues en traduisant les rotations selon les relations classiques entre les affixes). Au total, la rotation R a pour centre Ω d'affixe

$$\omega = \frac{(1-u)^7}{1+u} (u^3 - u + 1) = 2^6 i \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right)^6 \tan \frac{\alpha}{2} (u^6 - u^4 + u^3)$$

dont une valeur approchée est $\omega = 17,439\,476 - 17,504\,164\,i$.

On montrera de même que $a_{702} = R(a_{446})$; $a_{703} = R(a_{447})$; etc. ; $a_{701-k} = R(a_{445+k})$.

Les coordonnées de Ω montrent clairement qu'il est à l'intérieur du polygone

$A_{445}A_{446} \dots A_{449}A_{445} = BCDEF$. On est ainsi ramené au fait que l'image (P') d'un polygone convexe (P) par une rotation dont le centre est à l'intérieur de (P) coupe nécessairement les côtés de (P) car l'intersection de leurs intérieurs ne peut être vide (elle contient le centre de rotation).

