Duel

Louis-Marie Bonneval(*)

« Vous m'en rendrez justice, Monsieur ! »
Le vicomte de A… a provoqué en duel le lieutenant B… , qui l'a insulté en public. Il lui a laissé le choix des armes. Quoique peu adroit au pistolet – à vingt pas il atteint la cible une fois sur trois –, le lieutenant a choisi cette arme, car il sait que le vicomte quant à lui n'atteint la cible qu'une fois sur quatre.
Le jour se lève à peine en ce matin de mai, les deux adversaires sont sur le pré avec leurs témoins. Le duel aura lieu selon la tradition : ils sont dos à dos, au signal ils s'éloignent l'un de l'autre en comptant ensemble dix pas, se retournent et font feu en même temps. Si aucun des deux n'est touché, ils recommenceront le tir dans les mêmes conditions jusqu'à ce qu'au moins l'un des deux soit touché.

Oublions le côté tragique de cette pratique heureusement révolue – qui valut à Évariste Galois une fin prématurée – pour n'en retenir que l'aspect probabiliste : quelle est la probabilité pour chacun des protagonistes de sortir vainqueur ? Quelle est la probabilité que tous deux soient touchés ?

Cette situation peut donner lieu en Terminale ES spécialité mathématiques à un travail intéressant, mêlant graphes probabilistes et suites géométriques. Précisons cependant que l'aide active du professeur sera par moments indispensable, et qu'il ne peut donc s'agir que d'un TP, en aucun cas d'une évaluation.

Simulation

Pour simuler cette situation, il suffit de disposer de deux urnes :
• l'urne A contient une boule rouge (A touche son adversaire) et 3 blanches (A rate son adversaire) ;
• l'urne B contient une boule rouge (B touche son adversaire) et 2 blanches (B rate son adversaire).
On tire simultanément une boule dans chaque urne. Si au moins l'une des deux est rouge, on s'arrête. Sinon on remet chaque boule et on recommence.
Avec des élèves, on peut utiliser des bouts de papier identiques répartis en deux tas A et B, sur lesquels on a écrit « touche » ou « rate », et qu'on a retournés et mélangés.
Quant à la simulation sur tableur (voir annexe 1), elle est un peu difficile à construire pour des élèves. On pourra se contenter de leur faire utiliser le fichier *duel.xls*, disponible sur le site de l'APMEP en complément à cet article.

Étude théorique

Pour un tir (c'est-à-dire un échange de coups de feu), notons p la répartition de probabilité. Appelons TA et TB les événements : « A touche son adversaire », « B touche son adversaire ». On sait que p(TA) = 1/4 et p(TB) = 1/3.

(*) lm.bonneval@aliceadsl.fr

TA et TB sont indépendants puisque les deux adversaires font feu en même temps[(1)]. On en déduit :

$$p\left(TA \cap TB\right) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}, \quad p\left(TA \cap \overline{TB}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6},$$
$$p\left(\overline{TA} \cap TB\right) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}, \quad p\left(\overline{TA} \cap \overline{TB}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

Notons P la répartition de probabilité pour le duel entier. Pour pouvoir raisonner, nous supposerons des tirs fictifs permettant au duel de continuer indéfiniment, même après qu'un des adversaires ait été touché.

On peut alors, pour tout naturel n, noter respectivement AB_n, A_n, B_n, O_n les événements :
« A et B sont indemnes à l'issue du tir n »,
« A reste seul indemne à l'issue du tir n »,
« B reste seul indemne à l'issue du tir n »,
« Les deux adversaires sont touchés à l'issue du tir n ».

L'état initial se traduit par : $P\left(AB_0\right) = 1, P\left(A_0\right) = 0, P\left(B_0\right) = 0, P\left(O_0\right) = 0.$

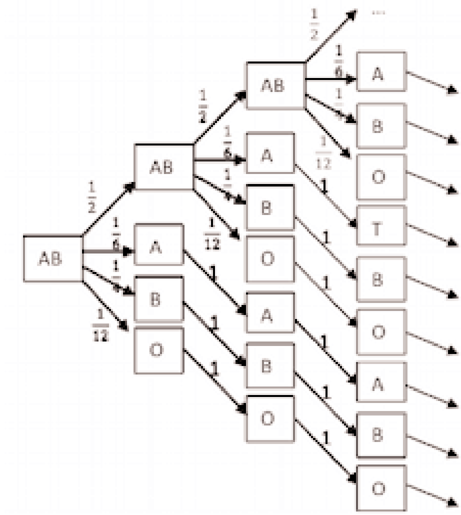
Et pour tout n non nul :

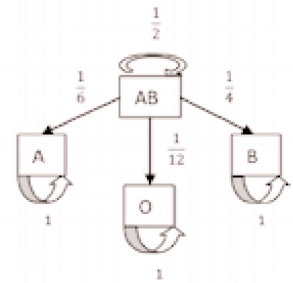
$$P_{AB_{n-1}}\left(AB_n\right) = p\left(\overline{TA} \cap \overline{TB}\right) = \frac{1}{2},$$
$$P_{AB_{n-1}}\left(A_n\right) = p\left(TA \cap \overline{TB}\right) = \frac{1}{6},$$
$$P_{AB_{n-1}}\left(B_n\right) = p\left(\overline{TA} \cap TB\right) = \frac{1}{4},$$
$$P_{AB_{n-1}}\left(O_n\right) = p\left(TA \cap TB\right) = \frac{1}{12}.$$

Il s'agit d'une situation évolutive[(2)] où sont possibles quatre états AB, A, B, O, le tir n faisant passer de l'état $n-1$ à l'état n. On peut la représenter soit par un arbre (infini), soit plus commodément par un graphe probabiliste :

(1) A contrario le moindre décalage temporaire rendrait les deux coups de feu fortement dépendants !

(2) C'est une chaîne de Markov : l'état n ne dépend que de l'état $n-1$, les probabilités de transition étant constantes.





On en déduit, par le théorème des probabilités totales :

$$\mathrm{P}(\mathrm{AB}_n)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(\mathrm{AB}_{n-1}),$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_n)=\frac{1}{6}\mathrm{P}(\mathrm{AB}_{n-1})+\mathrm{P}(\mathrm{A}_{n-1}),$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}_n)=\frac{1}{4}\mathrm{P}(\mathrm{AB}_{n-1})+\mathrm{P}(\mathrm{B}_{n-1}),$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{O}_n)=\frac{1}{12}\mathrm{P}(\mathrm{AB}_{n-1})+\mathrm{P}(\mathrm{O}_{n-1}).$$

Par suite :

$$\mathrm{P}(\mathrm{AB}_n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

et donc :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_n)-\mathrm{P}(\mathrm{A}_{n-1})=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}_n)-\mathrm{P}(\mathrm{B}_{n-1})=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{O}_n)-\mathrm{P}(\mathrm{O}_{n-1})=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Pour n non nul, appelons respectivement VA_n, VB_n et VO_n les événements :
« A reste seul indemne à l'issue du tir n pour la première fois »,
« B reste seul indemne à l'issue du tir n pour la première fois »,
« Les deux adversaires sont touchés à l'issue du tir n pour la première fois ».

$VA_n = A_n \cap \overline{A_{n-1}}$, donc

$$P(VA_n) = P(A_n) - P(A_{n-1})$$

puisque $A_{n-1} \subset A_n$. Donc

$$P(VA_n) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

De même

$$P(VB_n) = P(B_n) - P(B_{n-1}) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

et

$$P(VO_n) = P(O_n) - P(O_{n-1}) = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Appelons respectivement VA, VB et VO les événements :
« A est vainqueur du duel »,
« B est vainqueur du duel »,
« Les deux adversaires sont touchés ».

VA est la réunion de tous les VA_n, qui sont disjoints. Donc

$$P(VA) = \sum_{n=1}^{\infty} P(VA_n) = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{3}.$$

De même

$$P(VB) = \sum_{n=1}^{\infty} P(VB_n) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}$$

et

$$P(VO) = \sum_{n=1}^{\infty} P(VO_n) = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{6}.$$

Durée du duel

Appelons D le nombre de tirs effectifs jusqu'au dénouement.
Pour tout naturel n non nul,

$$P(D = n) = P(VA_n) + +P(VB_n) + P(VO_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

D suit la loi géométrique (voir annexe 2) de paramètre 1/2.
On en déduit E(D) = 2 : on peut en moyenne s'attendre à deux tirs.
On peut remarquer que

$$P(D > 10) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} < \frac{1}{1000}.$$

Cela permet pour une simulation sur tableur de se limiter à une dizaine de tirs.

Généralisation

Dans ce qui précède, les seules données numériques sont les habiletés au tir de chacun. On peut généraliser, en notant p_A et p_B les probabilités respectives pour A et B de toucher leur adversaire lors d'un tir.
La méthode ci-dessus fournit alors (en posant $q_A = 1 - p_A$ et $q_B = 1 - p_B$) :

$$P(VA) = \frac{p_A q_B}{1 - q_A q_B}, \quad P(VB) = \frac{q_A p_B}{1 - q_A q_B}, \quad P(VO) = \frac{p_A p_B}{1 - q_A q_B}.$$

Le nombre de tirs D suit la loi géométrique (voir annexe 2) de paramètre $1 - q_A q_B$.
Ce n'est pas surprenant, puisque D est la durée d'attente jusqu'à l'événement $TA \cup TB$, dont la probabilité est $1 - q_A q_B$ (qui s'écrit aussi $p_A + p_B - p_A p_B$).

Son espérance est donc $\dfrac{1}{1 - q_A q_B}$.

Ces formule excluent le cas $q_A q_B = 1$, c'est-à-dire $p_A = p_B = 0$, mais l'étude directe est alors très simple : les deux adversaires s'obstinant à se rater, le duel continue indéfiniment…
Les autres cas extrêmes permettent de vérifier la cohérence de ces formules : $p_A = 1$ et $p_B = 1$; $p_A = 1$ et $p_B = 0$.
On peut facilement adapter les simulations vues plus haut de façon à tester différentes valeurs de p_A et p_B.

Annexe 1 : Simulation sur tableur

On peut réserver les deux premières lignes à la saisie de p_A et p_B en cellules B1 et B2, au calcul de q_A et q_B en cellules E1 et E2.
À partir de la ligne 4, on peut prévoir une colonne pour l'état initial AB (en cellule A7), puis une colonne pour chaque tir.
Pour le tir nº 1, on indique en cellule B4 le résultat du tireur A ("TA" s'il touche son adversaire, "NA" sinon) : =SI(alea()<B1;"TA";"NA") ; en cellule B5 celui du tireur B : =SI(alea()<B2 ;"TB";"NB").
L'état n dépend à la fois de l'état $n - 1$ (cellule A7) et du tir n (cellules B4 et B5).
Il est commode d'intercaler une ligne auxiliaire pour indiquer (en cellule B6) ce qui se passe quand le résultat $n - 1$ est "AB" :
=SI(B4="TA";SI(B5="TB";"O";"A");SI(B5="TB";"B";"AB")).
On peut écrire cette ligne en blanc sur blanc.
On pourra alors écrire en cellule B7 : =SI(A7="AB";B6;A7).
On recopie ensuite les formules de la plage B4:B7 à droite aussi loin qu'on veut. En pratique une dizaine de colonnes suffit (pour p_A et p_B pas trop petits).
Si on veut raffiner en n'affichant que les tirs réels, on peut utiliser une mise en forme conditionnelle : si A7 contient autre chose que "AB", on écrit en blanc sur blanc les cellules B4:B7. On étend cette mise en forme à droite.

Annexe 2 : Loi géométrique

La loi géométrique n'est pas au programme de Terminale ES.
Dire que D suit la loi géométrique de paramètre p signifie que pour tout n naturel non nul, $P(D = n) = p(1 - p)^{n-1}$.
Lors d'une alternative répétée, la durée d'attente du premier succès suit cette loi.

Son espérance $p\sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1}$ est égale à $\frac{1}{p}$.

Cela résulte de l'identité, pour $0 \leq x < 1$:

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2} .$$

Cette identité peut être admise en TES. On pourrait la démontrer :

• soit en posant $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$, d'où $xf(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots$ et donc par soustraction

$$(1-x)\, f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x} \ ;$$

• soit en dérivant $g(x) = x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{x}{1-x}$;

• soit en développant $(1 - x)^{-2}$ par la formule du binôme(3).

(3) Rappelons que cette formule porte le nom de Newton parce qu'il l'a étendue aux exposants négatifs ou fractionnaires.