Calculer une espérance mathématique

Paul-Louis Hennequin(*) & Jean-Alain Roddier(**)

Cet article propose plusieurs solutions à un petit problème de calcul d'espérance. On notera que même si l'on peut appliquer la définition classique de l'espérance pour répondre à la question posée, le recours à des mathématiques plus évoluées permet d'être beaucoup plus rapide.

Il nous a semblé intéressant de partir de simulations avec des outils TICE.

Énoncé :

Une urne contient 3 boules noires et 2 blanches.
Un joueur qui connaît la composition de l'urne en extrait une boule.
***Si elle est blanche**, il l'enlève de l'urne.*
***Si elle est noire**, il la remet dans l'urne.*
***Il renouvelle les tirages** sauf s'il n'y a plus de boules blanches.*
***Soit* X *la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués** avant l'arrêt.*
Calculer l'espérance de X*.*

Étude empirique

Simulations de l'expérience :

Nous proposons dans cette partie des simulations de l'expérience qui permettent d'obtenir la moyenne des valeurs de X *pour des échantillons de taille 2 000 avec le tableur et de tailles bien plus grandes avec un logiciel de programmation.*

Avec un tableur :

Nous utilisons une feuille tableur qui simule l'expérience et qui donne un échantillon de taille 2 000 des valeurs prises par X. Le détail de la construction du tableau est donné en Annexe 1.

Ce tableau est construit de telle manière qu'une fois les deux blanches obtenues, la valeur de X correspondant à l'expérience apparaisse dans la case suivante. On limite (techniquement) le nombre de tirages dans l'urne à 100 tirages, en espérant que les deux boules blanches sortiront avant. Nous avons – par précaution – calculé et placé en annexe le calcul de la probabilité de l'événement (X > 100).

(*) Paul-Louis.Hennequin@math.univ-bpclermont.fr
(**) j-a.roddier@wanadoo.fr

Numéro du tirage	1	2	3	4
Expérience n°1	0	0	0	0
Expérience n°2	0	1	0	1
Expérience n°3	0	0	0	0
Expérience n°4	1	0	0	1
Expérience n°5	0	1	0	0
Expérience n°6	0	1	1	3
Expérience n°7	1	1	2	0
Expérience n°8	0	1	1	3
Expérience n°9	0	0	0	0
Expérience n°10	1	0	0	0

96	97	98	99	100	Valeur prise par X
0	0	0	0	0	10
0	0	0	0	0	4
0	0	0	0	0	14
0	0	0	0	0	4
0	0	0	0	0	12
0	0	0	0	0	3
0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	0	3
0	0	0	0	0	12
0	0	0	0	0	6

Expérience n°1990	0	1	0	0	0
Expérience n°1991	1	0	0	0	0
Expérience n°1992	0	0	1	1	4
Expérience n°1993	1	0	0	1	4
Expérience n°1994	0	1	0	0	1
Expérience n°1995	1	0	0	0	0
Expérience n°1996	1	0	1	3	0
Expérience n°1997	0	0	1	1	4
Expérience n°1998	0	1	0	0	0
Expérience n°1999	0	0	0	0	1
Expérience n°2000	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	7
0	0	0	0	0	8
0	0	0	0	0	4
0	0	0	0	0	4
0	0	0	0	0	5
0	0	0	0	0	13
0	0	0	0	0	3
0	0	0	0	0	4
0	0	0	0	0	10
0	0	0	0	0	12
0	0	0	0	0	11
Fréquence observée sur l'échantillon					6,443

La dernière colonne recense les différentes valeurs prises par X pour chacune des 2 000 expériences.

Au bas de cette colonne, on fait figurer la fréquence observée sur l'échantillon. Un simple clic sur la touche F9 permet d'obtenir un nouvel échantillon de 2 000 expériences.

Observation : La moyenne des valeurs de X semble être proche de 6,5.

Avec un logiciel de programmation : Python.

Le programme *Experience*() simule une seule expérience (c'est-à-dire les tirages successifs dans la même urne jusqu'à l'obtention de la deuxième boule blanche). Ce programme renvoie la valeur de X obtenue.

L'instruction randint(1,5) permet de simuler le tirage dans une urne contenant 5 boules ; le fait de sélectionner uniquement les valeurs obtenues qui dépassent strictement 3 permet de repérer les tirages qui donnent 1 boule blanche. C'est la même chose pour l'instruction randint(1,4), qui permet de simuler le tirage d'une boule dans une urne qui en contient 4, et l'on sélectionne uniquement la valeur 4 qui correspondra à une boule blanche.

La variable b contient le nombre de boules blanches tirées, le test b !=1 signifie $b \neq 1$.

```
>>> def Experience() :
        X=0
        b=0
        while b!=1:
                if randint(1,5)>3:
                        b=b+1
                X=X+1
        while b!=2::
```

```
            if randint(1,4)>3:
                b=b+1
            X=X+1
        return X
```

La fonction *Echantillon*() d'argument N renvoie la moyenne observée des valeurs de X sur un échantillon de taille N.

```
>>> def Echantillon(N):
        n=0
        S=0
        while n!=N:
            S=S+Experience()
            n=n+1
        return S/N
```

On lance la fonction *Echantillon*() avec des arguments de plus en plus grands. Il est à noter que la taille de l'échantillon peut aller jusqu'à un million, et que l'ordinateur renvoie malgré tout rapidement la réponse.

```
>>> Echantillon(100)
7.0099999999999998
>>> Echantillon(1000)
6.6859999999999999
>>> Echantillon(10000)
6.5206999999999997
>>> Echantillon(100000)
6.4948699999999997
>>> Echantillon(1000000)
6.49594
```

Observation : Les valeurs obtenues sur ces échantillons permettent (là aussi) de penser que l'espérance cherchée doit être proche de 6,5

Étude théorique

Première méthode : en utilisant la distribution de X et la définition de E

Pour tout entier $k \geq 2$, l'événement $X = k$ peut être illustré par le schéma suivant où l'on a eu k boules (sans jeu de mots) avant l'arrêt.

$$\underbrace{N\ldots\ldots N}_{i\text{ boules noires}}\underset{\text{Première boule blanche}}{B}\underbrace{N\ldots\ldots\ldots N}_{(k-i-2)\text{ boules noires}}\underset{\text{Deuxième boule blanche}}{B}\underset{\textbf{Arrêt}}{|||}$$

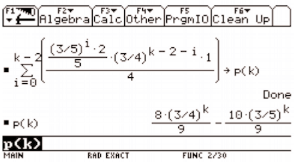
Distribution de la variable aléatoire X :

En observant l'urne à chaque renouvellement de tirages, on obtient :

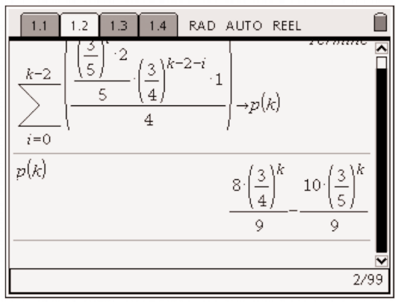
$$p(X=k)=\sum_{i=0}^{k-2}\left(\frac{3}{5}\right)^{i}\times\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k-2-i}\times\frac{1}{4}.$$

Essayons de transformer ces expressions en nous aidant de calculatrices utilisant un logiciel intégré de calcul formel.

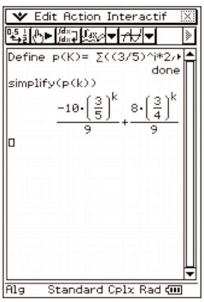
Voyage 200



TI-*n*spire CAS



ClassPad 330

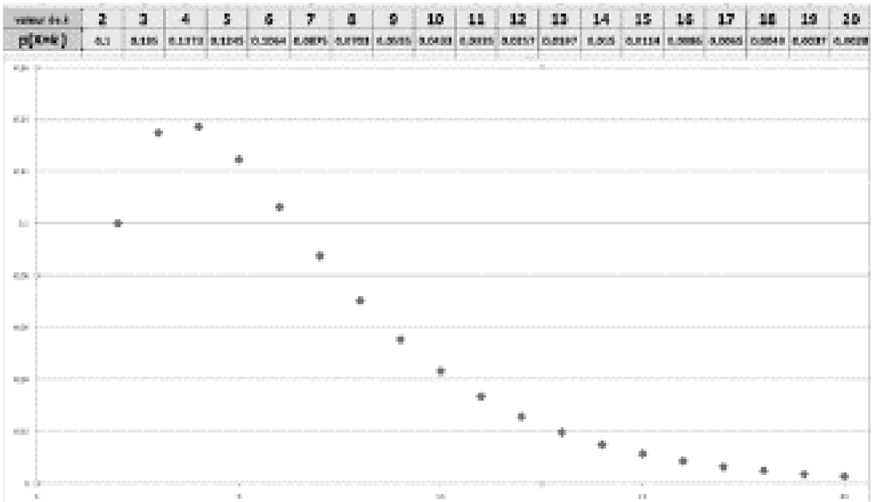


Preuve :

$$\begin{aligned}
p(X=k)&=\sum_{i=0}^{k-2}\left(\frac{3}{5}\right)^{i}\times\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k-2-i}\times\frac{1}{4}\\
&=\frac{1}{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-2}\left(\sum_{i=0}^{k-2}\left(\frac{4}{5}\right)^{i}\right)\\
&=\frac{1}{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-2}\times\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}}{\frac{1}{5}}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-2}\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}\right)\\
&=\frac{8}{9}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k}-\frac{10}{9}\times\left(\frac{3}{5}\right)^{k}.
\end{aligned}$$

À titre indicatif, construisons le nuage de points $\{M(k\,;\,p(X=k))\}_{k=2;\ldots;20}$

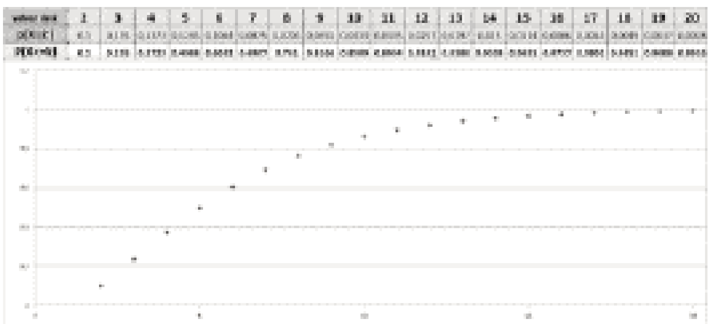
Nous lisons sur le graphique que 4 est le nombre de tirages le plus probable.



En annexe 2, nous avons déterminé l'expression de p(X ≥ *k*), qui permet de calculer entre autres la valeur de p(X > 100).

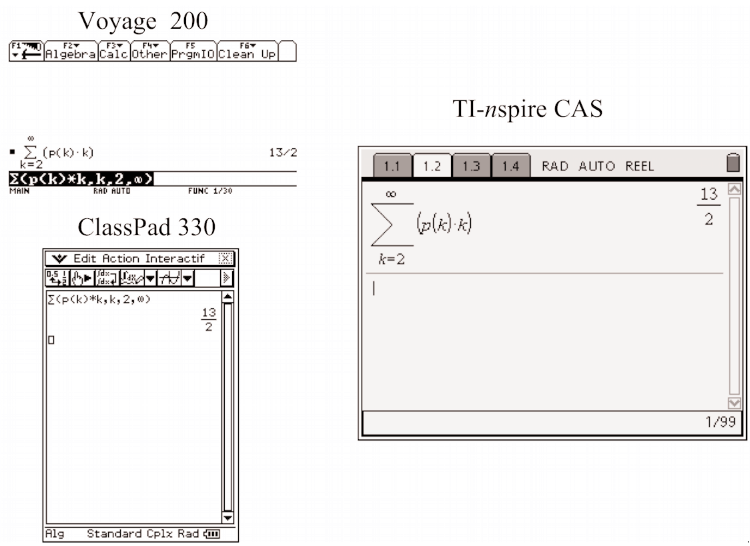
Nous avons placé ci-dessous le nuage de points $\{M(k\,;\,p(X \leq k))\}_{k=2;\ldots;20}$

Le graphique montre qu'on n'a « pratiquement aucune chance » de faire plus de 20 tirages, ce qui confirme largement le choix de se limiter à 100 tirages.



Calcul de l'espérance de la variable aléatoire X :

En utilisant des calculatrices intégrant un logiciel de calcul formel, nous obtenons les écrans ci-dessous :



Preuve :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{X}) &= \sum_{k=2}^{\infty} \mathrm{p}(\mathrm{X}=k)\times k \\
&= \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k}-\frac{10}{9}\times\left(\frac{3}{5}\right)^{k}\right)\times k \\
&= \sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{2}{3}\times\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}-\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}\right)\times k\right] \\
&= \frac{2}{3}\times\left(\sum_{k=2}^{\infty} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}-\sum_{k=2}^{\infty} k\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}\right) \\
&= \frac{2}{3}\times\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}-1\right)-\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}-1\right)\right)
\end{aligned}
$$

Or

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\times q^{k-1}=\frac{1}{(1-q)^{2}} \quad (-1<q<1), \qquad (1)$$

formule que l'on obtient, soit en dérivant l'identité

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^{k}=\frac{1}{1-q}$$

soit en utilisant la formule du binôme de Newton pour l'exposant (–2).

En appliquant cette formule :

$$E(X)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{3}{4}\right)^2}-\frac{1}{\left(1-\frac{3}{5}\right)^2}\right)=\frac{2}{3}\times\left(16-\frac{25}{4}\right)=\frac{13}{2}=6{,}5.$$

Deuxième méthode : En utilisant la linéarité de l'espérance mathématique

Pour réduire les calculs et alléger un peu cette présentation, nous introduisons deux variables aléatoires Y et Z où Y représente le nombre de tirages jusqu'à la sortie de la première boule blanche (ce tirage étant compris dans le décompte) et Z désigne le nombre de tirages nécessaires ensuite pour avoir la sortie de la seconde boule blanche. On a alors : X = Y + Z.

On a : $p(Y=k)=\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}\times\left(\frac{2}{5}\right)$ et

$$E(Y)=\sum_{k=2}^{\infty}p(Y=k)\times k=\frac{2}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}\times k=\frac{2}{5}\frac{1}{\left(1-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{5}{2}.$$

en utilisant (1).

De même : $p(Z=k)=\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\times\left(\frac{1}{4}\right)$ et

$$E(Z)=\sum_{k=2}^{\infty}p(Z=k)\times k=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\times k=\frac{1}{4}\frac{1}{\left(1-\frac{3}{4}\right)^2}=4.$$

en utilisant (1).
Finalement :

$$E(X)=E(Y)+E(Z)=\frac{5}{2}+4=\frac{13}{2}=6{,}5.$$

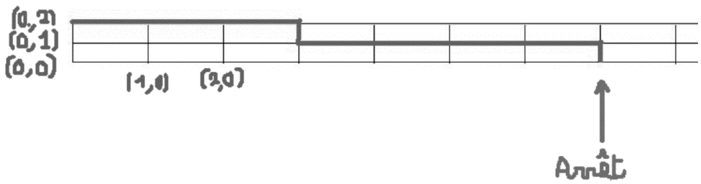
Troisième méthode : En utilisant le caractère récurrent de l'expérience

Comme Blaise Pascal il y a 350 ans, ou plus récemment Andreï Kolmogorov dans les années trente, nous cherchons une relation de récurrence entre espérances.

Une marche aléatoire sur une grille

Pour étudier le processus des tirages successifs : N, …, NBN, …, NB, on peut lui associer une marche aléatoire sur une grille $2\times n$ avec n assez grand.

Partant du point de coordonnées (0,2), on se déplace d'un pas vers la droite si l'on tire une boule noire (avec la probabilité $\frac{3}{5}$), et on se déplace d'un pas vers le bas si l'on tire une boule blanche (avec la probabilité $\frac{2}{5}$).



On se déplace ensuite en suivant le même processus et en fonction de la couleur de la boule tirée. Le processus s'arrête lorsque l'on atteint la ligne la plus basse de la grille. Autrement dit partant du point de coordonnées (i, j), on se déplace d'un pas vers la droite (au point de coordonnées $(i + 1, j)$) avec la probabilité $\frac{3}{3+j}$ et d'un pas vers le bas avec la probabilité $\frac{j}{3+j}$. On s'arrête dès que $j = 0$.

Considérons le premier tirage qui est effectué dans une urne contenant 3 boules noires et 2 blanches, et notons comme plus haut, Y le nombre de tirages nécessaires pour sortir une boule blanche de l'urne.

Si le premier tirage donne une blanche (avec une probabilité de $\frac{2}{5}$), on a : Y =1. Sinon, on remet cette boule et le deuxième tirage est (comme le premier tirage) effectué dans une urne contenant 3 boules noires et 2 boules blanches. Donc, avec une probabilité de $\frac{3}{5}$, Y = 1 + Y′ où Y′ est une variable aléatoire ayant la même distribution que Y.

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\left(1 + \mathrm{E}(\mathrm{Y}')\right).$$

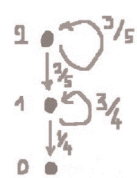
Or, comme les urnes sont strictement identiques, E(Y) = E(Y′).

On en déduit que $\left(1 - \frac{3}{5}\right)\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = \frac{2}{5}$, autrement dit $\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = \frac{5}{2}$.

De même, $\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(1 + \mathrm{E}(\mathrm{Z})\right)$, c'est-à-dire que E(Z) = 4.

Finalement $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{5}{2} + 4 = \frac{13}{2}$,

Remarque : Le fait que les variables aléatoires Y et Y′ aient la même distribution, peut être utilisé pour simplifier le graphe et se ramener à un graphe ayant 3 sommets et 4 arêtes orientées et pondérées.



Étude du cas général

Partons d'une urne contenant b boules blanches et n boules noires et notons $X_{b,n}$ le nombre de tirages nécessaires pour tirer la dernière boule blanche. Nous cherchons $E(X_{b,n})$.

Chaque méthode est la généralisation – dans l'ordre – de celle employée dans le cas particulier où $(b,n)= (2,3)$.

1ère méthode : utilisation directe de la distribution de $X_{b,n}$ et de la définition de l'espérance.

$$p\left(X_{b,n}=k\right)=\sum\left(\frac{n}{b+n}\right)^{i_1}\frac{b}{b+n}\left(\frac{n}{b-1+n}\right)^{i_2}\frac{b-1}{b-1+n}\cdots\left(\frac{n}{1+n}\right)^{i_b}\frac{1}{1+n}$$

où la somme $\sum$ est étendue à tous les b-uplets $(i_1,i_2,\ldots,i_b)$ d'entiers positifs ou nuls tels que $i_1 + i_2 + \ldots + i_b = k - b$.

Pour calculer $p(X_{b,n} = k)$, on peut procéder par récurrence sur b

$$p\left(X_{b,n}=k\right)=\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{n}{b+n}\right)^{i}\frac{b}{b+n}p\left(X_{b-1,n}=k-i-1\right)$$

avec $p(X_{0,n} = 0) = 1$, car on arrête les tirages dès qu'il n'y a plus de boules blanches dans l'urne.

De cette relation, on déduit :

$$E\left(X_{b,n}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}kp\left(X_{b,n}=k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}k\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{n}{b+n}\right)^{i}\frac{b}{b+n}p\left(X_{b-1,n}=k-i-1\right).$$

En permutant les sommations, on obtient.

$$\begin{aligned}E\left(X_{b,n}\right)&=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{n}{b+n}\right)^{i}\frac{b}{b+n}\sum_{k=i+1}^{\infty}\left(k-(i+1)+(i+1)\right)p\left(X_{b-1,n}=k-i-1\right)\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{n}{b+n}\right)^{i}\frac{b}{b+n}\\&\qquad\sum_{k=i+1}^{\infty}\left[\left(k-(i+1)\right)p\left(X_{b-1,n}=k-i-1\right)+(i+1)p\left(X_{b-1,n}=k-i-1\right)\right]\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{n}{b+n}\right)^{i}\frac{b}{b+n}\left[E\left(X_{b-1,n}\right)+(i+1)\right]\\&=\frac{b}{b+n}\frac{1}{\left(1-\frac{n}{b+n}\right)^{2}}+E\left(X_{b-1,n}\right)\frac{b}{b+n}\frac{1}{\left(1-\frac{n}{b+n}\right)}\\&=\frac{b+n}{b}+E\left(X_{b-1,n}\right).\end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{X}_{b,n}\right)=b+n\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b-1}+\ldots+1\right).$$

Remarque : Cette étude est laborieuse ; cette constatation nous invite à envisager d'autres méthodes.

Deuxième méthode : utilisation de la linéarité de l'espérance.

On peut écrire $\mathrm{X}_{b,n}$ sous la forme

$$\mathrm{X}_{b,n}=\sum_{i=1}^{b}\left(\mathrm{X}_{i,n}-\mathrm{X}_{i-1,n}\right).$$

Cette égalité classique se démontre en écrivant la somme, en simplifiant et en convenant que $\mathrm{X}_{0,n}=0$.

Pour tout entier $k\geq 1$, on a :

$$\mathrm{p}\left(\left(\mathrm{X}_{i,n}-\mathrm{X}_{i-1,n}\right)=k\right)=\left(\frac{n}{i+n}\right)^{k-1}\frac{i}{i+n},$$

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{X}_{i,n}-\mathrm{X}_{i-1,n}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{n}{i+n}\right)^{k-1}\frac{i}{i+n}=\frac{1}{\left(1-\frac{n}{i+n}\right)^{2}}\frac{i}{i+n}=1+\frac{n}{i},$$

d'où l'on déduit que :

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{X}_{b,n}\right)=b+n\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b-1}+\ldots+1\right).$$

Troisième méthode : par récurrence.

Notons $\mathrm{Y}_{i,n}$ le nombre de tirages à effectuer pour tirer une boule blanche dans une urne contenant i blanches et n noires.

Si le premier tirage donne une boule blanche, $\mathrm{Y}_{i,n}=1$.

S'il donne une boule noire, $\mathrm{Y}_{i,n}=1+\mathrm{Y}'$ où Y' est une variable ayant la même distribution que Y. On en déduit que

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{Y}_{i,n}\right)=\frac{i}{i+n}+\frac{n}{i+n}\left(\mathrm{E}\left(\mathrm{Y}_{i,n}\right)+1\right).$$

d'où $\mathrm{E}\left(\mathrm{Y}_{i,n}\right)=\frac{n}{i}+1$. Finalement

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{X}_{b,n}\right)=\sum_{i=1}^{b}\mathrm{E}\left(\mathrm{Y}_{i,n}\right)=b+n\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b-1}+\ldots+1\right).$$

par récurrence sur b.

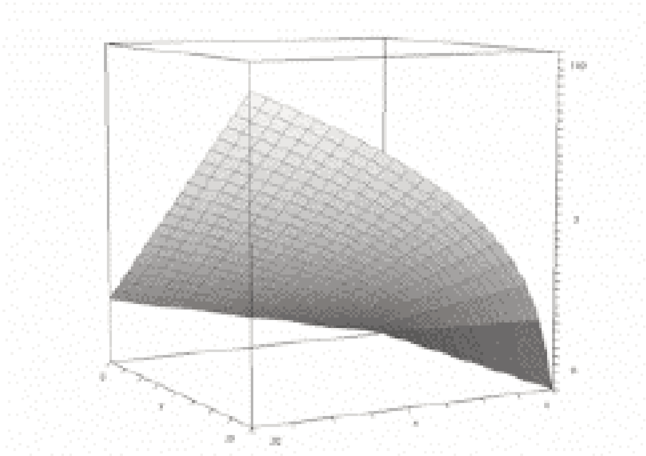
Remarque : Pour b grand, on peut approcher $\mathrm{E}(\mathrm{X}_{b,n})$ par $b+n\,[\ln b+c]$ avec $c=0{,}577\ldots$ la constante d'Euler.

Pour finir, nous avons représenté ci-contre la surface d'équation

$z=f(x,y)$ pour $0\leq x\leq 20$; $0\leq y\leq 20$ et $0\leq z\leq 100$, où

$$f(x,y) = x + y\left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{x}\right].$$

Le maillage est obtenu par « croisement » de droites et de courbes plus compliquées. Lorsque l'on fixe la variable x, on obtient une fonction affine de y ; et lorsque l'on fixe la variable y, on obtient une fonction de x équivalente à l'infini à la fonction $x \mapsto x + y(\ln x + c)$.



Ce processus de tirages dans une urne peut servir à modéliser une situation physique où l'on cherche à freiner une disparition (des boules blanches) en introduisant un ralentisseur (les noires). Le graphique ci-dessus montre ce qu'on gagne en jouant sur les paramètres *b* et *n*.

Annexe

Construction de la feuille tableur

Sur la ligne 2, on place le nº du tirage dans la même urne, on va de la case B2 jusqu'à la case CW2, ce qui autorise 100 tirages (en « espérant » que les deux boules blanches sortiront avant).
On rappelle que l'instruction ALEA() renvoie un nombre pseudo aléatoire situé dans l'intervalle [0 ; 1[.

Simulation du tirage dans l'urne initiale.
On construit une formule permettant de simuler le tirage dans l'urne initiale qui contient 5 boules. On convient que si le résultat de la séquence ENT(5*ALEA()+1) donne 1, 2 ou 3, la boule est noire et sinon elle est blanche.

En B3, on réalise le premier tirage de la première expérience, on place la formule :
=SI(ENT(5*ALEA()+1)<4 ;0 ;1)

Cette formule permet de simuler le tirage aléatoire dans l'urne avec 5 boules. On convient que si le résultat de la séquence ENT(5*ALEA()+1) donne 1, 2 ou 3, la boule est noire et sinon elle est blanche.
On étend cette formule sur la colonne B jusqu'à la case B2002.

Simulation du second tirage et des suivants.
La formule placée en C3 est compliquée, elle correspond à la règle du jeu.
La séquence ENT(4*ALEA()+1) correspond cette fois-ci au tirage aléatoire d'une boule dans une urne qui en contient 4.

En C3, on place la formule :
=SI(SOMME($B3 :B3)=0 ;SI(ENT(5*ALEA()+1)<4 ;0 ;1) ;SI(SOMME($B3 :B3)=1 ;SI(ENT(4*ALEA()+1)<4 ;0 ;1) ;SI(SOMME($B3 :B3)>2 ;0 ;SI(SOMME($B3 :B3)=2 ;C$2-1))))
On étend cette formule sur toute la plage C3 : CX2002.
La colonne CX est laissée en caractère de petite taille car elle est placée uniquement là pour recevoir d'éventuelles valeurs au cas où la deuxième boule blanche serait tirée au 100^{e} tirage (ce qui a « peu » de chances de se produire).

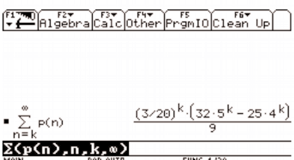
Obtention de la valeur de X pour chacune des expériences.
En CY3, on place la formule = SOMME(B3 :CX3) – 2 (c'est la valeur de notre variable aléatoire obtenue pour notre première expérience).
On étend cette formule sur la colonne CY jusqu'à la case CY2002.

Obtention de la fréquence observée sur l'échantillon des 2000 expériences.
En CY2003, on place la formule = MOYENNE(CY3 :CY2002) (c'est la valeur moyenne des valeurs prises par la variable aléatoire sur les 2000 expériences que l'on vient de réaliser).

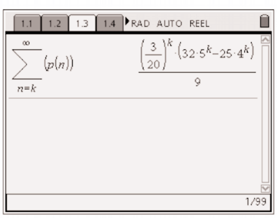
Calcul de p(X > 100)

Calcul de P(X≥k) avec des calculatrices utilisant du calcul formel :

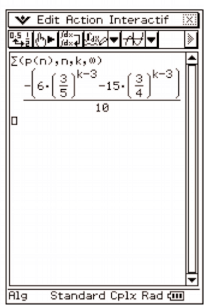
Voyage 200



TI-*n*spire CAS



ClassPad 330



Preuve :

$$\begin{aligned}\mathrm{p}(X \geq k) &= \sum_{n=k}^{\infty} \mathrm{p}(X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{2}{3} \times \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right) \\ &= \frac{2}{3}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \times 4 - \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \times \frac{5}{2}\right],\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathrm{p}(X > 100) &= \mathrm{p}(X \geq 101) \\ &= \frac{2}{3} \times \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{100} \times 4 - \left(\frac{3}{5}\right)^{100} \times \frac{5}{2}\right] = 8{,}552\,54 \times 10^{-13} \text{ à } 10^{-18} \text{ près.}\end{aligned}$$

Ce résultat nous permet de calculer la probabilité que pour N répétitions de l'expérience on ait : $X_n \leq 100$.
Elle est environ égale à

$$\left[1 - \left(8{,}56 \times 10^{-13}\right)\right]^{N} \geq 1 - N \times 8{,}55 \times 10^{-13},$$

soit 0,9999999983 pour N = 2 000 et $1 - 8{,}56 \times 10^{-7} = 0{,}999999143$ pour $N = 10^6$.

Remarque : Ce résultat nous conforte dans la limitation que nous avions faite du nombre de tirages dans la simulation avec le tableur.