Exercices de-ci, de-là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par Mél à :
bruno.alaplantive@free.fr
ou par courrier à :
Jean Fromentin, 17 rue de la Roussille, 79000 NIORT.

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial, une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Retard : Certaines de vos réponses me parviennent quelques fois après la mise en page, qui se fait toujours avec un numéro d'avance sur la parution. Vous ne disposez donc que du laps de temps entre deux numéros pour être éventuellement publié. Mais il va sans dire qu'une solution particulièrement élégante ou originale serait publiée après coup.

Exercices

Exercice 489-1 : Espace *(d'après les olympiades mathématiques d'Israël 1995)*

Quatre points non coplanaires étant donnés, on appelle « équiplan » tout plan équidistant de chacun de ces quatre points.
Combien y a-t-il d'équiplans ?

Exercice 489-2 : Une suite de carrés *(d'après la compétition mathématique de Slovénie 1998)*

Prouver que chaque nombre de la suite 49 ; 4 489 ; 444 889 ; 44 448 889 ; … est un carré parfait (dans chaque nombre, il y a n quatre, $n - 1$ huit et un neuf).

Exercice 489-3 (Gabriel Lamé–Paris)

ABCD est un quadrilatère non croisé inscriptible dans un cercle dont les côtés [AB], [BC], [CD] et [DA] mesurent respectivement 2 cm, 3 cm, 4 cm et 5 cm.
Proposer une construction de ABCD.

Exercice 489-4 : *Complexe (d'après les XXXIII^{es} olympiades espagnoles)*

Montrer que tout nombre complexe non nul peut s'exprimer comme somme de deux nombres complexes dont la différence et le quotient sont des imaginaires purs.

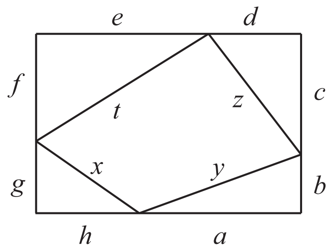
Solutions

Exercice 487-1 : Daniel Reisz-Auxerre *(d'après la Compétition mathématique des pays baltes 2004)*

Soit un rectangle ABCD de dimensions 3 × 4. Sur chaque coté on choisit un point. Ces quatre points sont les sommets d'un quadrilatère convexe dont les cotés mesurent x, y, z et t. Encadrer au mieux la somme $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$.

Solution de Albert Marcout (Sainte Savine)

Avec les notations indiquées sur la figure :



$$\begin{aligned} S &= x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \\ &= (g^2 + h^2) + (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) + (e^2 + f^2) \\ &= (a^2 + h^2) + (b^2 + c^2) + (d^2 + e^2) + (f^2 + g^2). \end{aligned}$$

$(a^2 + h^2) = (a + h)^2 - 2ah = 16 - 2ah.$

$(b^2 + c^2) = (b + c)^2 - 2bc = 9 - 2bc.$

$(d^2 + e^2) = (d + e)^2 - 2de = 16 - 2de.$

$(f^2 + g^2) = (f + g)^2 - 2fg = 9 - 2fg.$

Comme la somme $a + h$ est fixe et égale à 4, le produit ah est maximum quand $a = h = \frac{4}{2} = 2.$ Donc le minimum de $16 - 2ah$ est $16 - 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 8$.

De même le minimum de $16 - 2bc$ est obtenu pour $b = c = \frac{3}{2}$ et vaut $9 - 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}.$

Le minimum de S est donc $8 + 8 + \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 25.$ Il est obtenu par le losange des milieux des côtés. Le maximum de S est évidemment obtenu pour le rectangle lui même et vaut $16 + 16 + 9 + 9 = 50$. Finalement :

$$25 \le x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \le 50.$$

Autres solutions : Odile Simon (La Prénessaye), Franck Gautier (Pérignat-lès-Sarliève), Jean-Claude Carréga (Lyon), Alain Corre (Moulins), Giovanni Ranieri (Melun), Olivier Ayassou (Acoua), Michel Sarrouy (Mende), Georges Lion (Wallis), Jean-Yves Le Cadre (Saint Avé), Daniel Reisz (Auxerre), Bernard Collignon (Coursan).

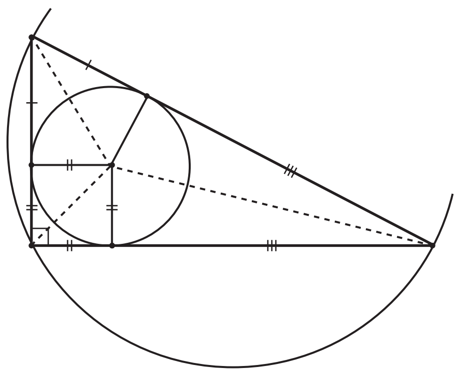
Exercice 487-2 : Pythagore sans les carrés… ?

Démontrer que : dans un triangle rectangle, la somme des côtés de l'angle droit est égale à la somme des diamètres des cercles inscrit et circonscrit.

Solution

Vous avez été nombreux à donner une démonstration – basée sur la figure ci-dessous – dont je me permets de faire un raccourci extrême…

Regarde !



Solutions : Arnold Christian (Carouge), Pascal Avila (Marange-Silvange), Odile Simon (La Prénessaye), Jean Gounon (Chardonnay), Jean-Claude Carréga (Lyon), Alain Corre (Moulins), Giovanni Ranieri (Melun), Olivier Ayassou (Acoua), Michel Sarrouy (Mende), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Georges Lion (Wallis), Albert Marcout (Sainte Savine), Jean-Yves Le Cadre (Saint Avé), Bernard Collignon (Coursan).

Exercice 487 - 3 : Arithmétique

Trouver toutes les solutions de l'équation $6(a!+3)=b^2+5$ où a et b sont des entiers naturels.

Solution de Odile Simon (La Prénessaye)

Il s'agit de déterminer, pour chaque valeur de a, entier naturel, si l'expression $\mathrm{A}=6(a!+3)-5$ est un carré parfait.

Pour $a = 1$ ou $a = 0$, on a $\mathrm{A} = 19$, donc pas de solution.
Pour $a = 2$, on a $\mathrm{A} = 25$, on obtient une solution : $a = 2$ et $b = 5$.

Pour $a = 3$, on a $A = 49$, on obtient une solution : $a = 3$ et $b = 7$.
Pour $a = 4$, on a $A = 157$, ce nombre n'est pas un carré, donc pas de solution.
Pour $a \geq 5$, $a!$ est multiple de 10, ainsi le nombre A se termine toujours par le chiffre 3, c'est-à-dire qu'il est égal à 3 *modulo* 10. En calculant les carrés dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, on a :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

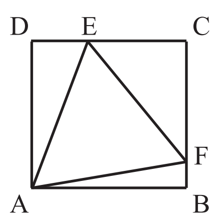
On constate qu'aucun carré d'entier naturel n'est égal à 3 *modulo* 10. Ainsi les seules solutions de l'équation sont :

$$a = 2 \; ; \; b = 5 \text{ et } a = 3 \; ; \; b = 7.$$

Autres Solutions : Franck Gautier (Pérignat-lès-Sarliève), Jean-Claude Carréga (Lyon), Alain Corre (Moulins), Giovanni Ranieri (Melun), Olivier Ayassou (Acoua), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Georges Lion (Wallis), Albert Marcout (Sainte Savine), Vincent Thill, Bernard Collignon (Coursan).

Remarque. Les réponses proposées ont nettement modulé … les modulos ! Ont ainsi été proposés les modulos 5, 6, 8, 10 ; sans oublier une étude directe pour a supérieur ou égal à 26.

Exercice 487 - 4



ABCD est un rectangle, AEF un triangle équilatéral où E et F sont sur [DC] et [CB].
Quelle relation lie les aires des triangles ADE, AFB et ECF ?

Mea culpa. *Vous avez rectifié de vous-même l'erreur typographique : il fallait bien lire* ECF *et non* ECB.

Solution de Georges Lion (Wallis)

Posons $\alpha = \widehat{\text{DAE}}$.

On obtient $\widehat{\text{CEF}} = \dfrac{\pi}{2} + \alpha - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + \alpha$ et $\widehat{\text{BFA}} = \dfrac{\pi}{6} + \alpha + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + \alpha$.

Notons a la longueur du triangle équilatéral et calculons les aires des trois autres côtés :

$$\text{S}(\text{ADE}) = \frac{a^2}{2} \sin\alpha\cos\alpha = \frac{a^2}{4}\sin 2\alpha \; ;$$

$$\text{S}(\text{FEC}) = \frac{a^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\alpha\right) \; ; \; \text{S}(\text{AFB}) = \frac{a^2}{4}\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2\alpha\right) \; ;$$

$$S(\mathrm{ADE})+S(\mathrm{AFB})=\frac{a^2}{4}\left[\sin 2\alpha+\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2\alpha\right)\right]$$
$$=\frac{a^2}{4}\Im\left[e^{2i\alpha}+e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+2\alpha\right)}\right]=\frac{a^2}{4}\Im\left[e^{i\left(\frac{\pi}{3}+2\alpha\right)}\right]\left[e^{-i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{3}}\right]=S(\mathrm{FEC}).$$

On a donc la relation suivante : S(ADE) + S(AFB) = S(FEC).

Autres solutions : Albert Marcout (Sainte Savine), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Michel Hébraud (Toulouse), Éric Trotoux (Caen), Patrice Debart (Marseille), Bernard Collignon (Coursan).

Remarques.

- Le hasard a voulu que cet exercice ait été proposé très récemment dans l'Oméga, parution que propose la régionale de Caen et disponible à :

  http://www.apmep.asso.fr/spip.php?article3340

  Éric Trotoux y propose notamment des solutions géométriques utilisant des outils élémentaires ainsi qu'une splendide équidécomposition à ne pas rater.

- Patrice Debart tient quant à lui un site très complet d'activités et exercices en tout genre de la Sixième à la Terminale (!) proposant entre autres des reprises d'exercices de-ci, de-là. À ne pas rater non plus !

  http://pagesperso-orange.fr/debart/college/triangle_carre.html#ex487

Nota.

- On montre assez facilement que la condition d'existence de la figure est :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\leq\frac{L}{l}\leq\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

- La relation à trouver n'étant pas précisée, la réponse

$$\left(S(\mathrm{ADE})-\frac{1}{2}S(\mathrm{ABCD})\right)\times\left(S(\mathrm{AFB})-\frac{1}{2}S(\mathrm{ABCD})\right)=\frac{1}{2}S(\mathrm{ABCD})\times S(\mathrm{FEC})$$

  m'a été proposée.
  Elle est générale à la figure sans prendre en compte le fait que le triangle est équilatéral. Je n'ai pas réussi à l'exploiter pour en tirer l'autre relation.

- Michel Hébraud a considéré le problème à l'envers en cherchant un rectangle (ou un carré) circonscrit à un triangle équilatéral donné. Ainsi posée, la question peut se généraliser à la recherche d'un polygone équiangle et si possible régulier, circonscrit à un polygone régulier à n côtés donné. Cette recherche est ouverte…