Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART
13, rue des Garennes
63800 Cournon d'Auvergne
ou par courriel à
hochartmax@yahoo.fr

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 489-1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs (dans $\mathbb{N}^*$) de n. Si n est divisible par 24, en est-il de même de $\sigma(n-1)$?

Problème 489-2 (Question de Fernand Canonico)

Soit n un entier strictement positif. Pour $(u_1,\ldots,u_n) \in \mathbb{N}^n$, on note

$$\varphi(u_1,\ldots,u_n) = (|u_2-u_1|,|u_3-u_2|,\ldots,|u_n-u_{n-1}|,|u_1-u_n|).$$

Pour quelles valeurs de n une des itérées de φ est l'application nulle ?

Problème 489-3 (Question de George Lion)

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de centre O, de foyers F et F′, d'axes de longueurs $2a > 2b$, inscrite dans le parallélogramme ABB′A′, de point de contact avec (AB) noté M tel que

$$\frac{\text{MA}}{\text{MB}} = \tan^2\left(\frac{\widehat{\text{A}'\text{AB}}}{2}\right).$$

On note $d = \mathrm{d}(\text{O},\text{AB})$, $c = \text{OF}$, $\mathcal{P}$ le cercle de centre O et de rayon a et D le point d'intersection de (FF′) et de la perpendiculaire à (AB) menée par M.

1. Définir un cercle Γ, tangent à (AA′) et (BB′) et tangent extérieurement à $\mathcal{E}$ en M. On note C et R le centre et le rayon de Γ et $r = \text{DM}$.
2. Démontrer $ab = d\text{R}$, puis $\text{OC} = a + b$, enfin $\dfrac{r}{\text{R}} = \dfrac{b}{a}$.
3. On mène par M la perpendiculaire à (FF′) qui coupe $\mathcal{P}$ en K du même côté de (FF′). Montrer que les points O, K, C sont alignés.
4. Application : l'ellipse $\mathcal{E}$ étant définie comme ci-dessus, donner une construction géométrique de ses axes.

Problème 488-4 (Question de Michel Lafond)

Le système

$$a + b + c = 6 \text{ et } abc = 9$$

a-t-il des solutions dans $\mathbb{R}_+$? Dans $\mathbb{Q}_+$? Dans $\mathbb{R}$? Dans $\mathbb{Q}$?

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 482-3

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{S}(n)$ la somme des chiffres dans l'écriture de n en base 10.

Trouver les $k \in \mathbb{N}^*$ tels que la suite $\left(\dfrac{\mathrm{S}(n)}{\mathrm{S}(kn)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit majorée.

Solution de Bernard Collignon (Coursan) – On se propose d'établir le résultat suivant : pour $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $\left(\dfrac{\mathrm{S}(n)}{\mathrm{S}(kn)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée si et seulement si k est de la forme $2^p \times 5^q$ avec $p,\ q \in \mathbb{N}$.

I – Premier cas : $k = 2^p \times 5^q$.

Dans cette partie, on suppose que $k = 2^p \times 5^q$ avec $p,\ q \in \mathbb{N}$. Si $p = q$,

$$\mathrm{S}(kn) = \mathrm{S}\left(10^p n\right) = \mathrm{S}(n),$$

donc la suite $\left(\dfrac{\mathrm{S}(n)}{\mathrm{S}(kn)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.

On suppose désormais $p \neq q$. La majoration de la suite $\left(\dfrac{\mathrm{S}(n)}{\mathrm{S}(kn)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ découle alors du lemme suivant.

Lemme 1. 1. *S'il existe $a,\ b > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$a \leq \frac{\mathrm{S}(n)}{\mathrm{S}(2n)} \leq b, \tag{1}$$

alors la suite $\left(\dfrac{\mathrm{S}(n)}{\mathrm{S}(kn)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\mathrm{S}(n)}{\mathrm{S}(2n)} \leq 5. \tag{2}$$

Preuve — L'encadrement (1) implique, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a^p \leq \frac{\mathrm{S}(n)}{\mathrm{S}(2n)} \times \frac{\mathrm{S}(2n)}{\mathrm{S}(4n)} \times \ldots \times \frac{\mathrm{S}\left(2^{p-1}n\right)}{\mathrm{S}\left(2^p n\right)} = \frac{\mathrm{S}(n)}{\mathrm{S}\left(2^p n\right)} \leq b^p.$$

Par ailleurs, on a aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{b} \leq \frac{S(2n)}{S(n)} \leq \frac{1}{a},$$

soit encore

$$\frac{1}{b} \leq \frac{S(10n)}{S(5n)} = \frac{S(n)}{S(5n)} \leq \frac{1}{a},$$

puis

$$\left(\frac{1}{b}\right)^q \leq \frac{S(n)}{S(5n)} \times \frac{S(5n)}{S(25n)} \times \ldots \times \frac{S\left(5^{q-1}n\right)}{S\left(5^q n\right)} = \frac{S(n)}{S\left(5^q n\right)} \leq \left(\frac{1}{a}\right)^q.$$

Finalement, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{a^p}{b^q} \leq \frac{S(n)}{S\left(2^p n\right)} \times \frac{S\left(2^p n\right)}{S\left(2^p 5^q n\right)} = \frac{S(n)}{S\left(2^p 5^q n\right)} \leq \frac{b^p}{a^q}, \qquad (3)$$

ce qui établit le premier point.

Le second point découle de la sous-additivité de la fonction S, à savoir, pour x, $y \in \mathbb{N}^*$,

$$S(x + y) \leq S(x) + S(y).$$

Admettons ce résultat pour le moment. En prenant $x = y = n \in \mathbb{N}^*$, on obtient

$$0 < S(2n) \leq 2S(n),$$

d'où la minoration souhaitée :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{S(n)}{S(2n)}.$$

On a aussi par sous-addditivité

$$S(5n) \leq 5S(n),$$

soit encore

$$S(n) = S(10n) \leq 5S(2n),$$

d'où la majoration souhaitée,

$$\frac{S(n)}{S(2n)} \leq 5.$$

On peut noter que l'encadrement

$$\frac{1}{2} \leq \frac{S(n)}{S(2n)} \leq 5$$

est optimal puisque pour $n = 12$, $\dfrac{S(n)}{S(2n)} = \dfrac{1}{2}$ tandis que pour $n = 5$, $\dfrac{S(n)}{S(2n)} = 5$.

Pour être complet, il reste à établir la sous-additivité de S. Sans restreindre la généralité, on peut supposer $y \leq x$ et poser

$$x = \sum_{i=0}^{N} x_i 10^i, \quad y = \sum_{i=0}^{N} y_i 10^i$$

avec x_i, $y_i \in [[0, 9]]$ et $x_N \neq 0$. La sous-additivité résulte de la relation facile à vérifier

$$S(x+y) = S(x) + S(y) - 9r$$

où r est le nombre (≥ 0) de retenues effectuées dans l'addition terme à terme des deux sommes précédentes. Prenons par exemple

$$x = 942\,432\,874 \text{ et } y = 65\,497\,345.$$

On a alors

$$x + y = 1\,007\,930\,219$$

et

$$S(x) = 43,\ S(y) = 43,\ S(x+y) = 32.$$

De plus, dans l'addition $x + y$, le nombre de retenues est $r = 6$:

retenue	1	1			1	1	1	1		
x		9	4	2	4	3	2	8	7	4
y		0	6	5	4	9	7	3	4	5
$x + y$	1	0	0	7	9	3	0	2	1	9

On a effectivement

$$S(x) + S(y) = S(x+y) + 9r.$$

II – Second cas : k possède un diviseur premier autre que 2 et 5.

On suppose désormais que k n'est pas de la forme $2^p \times 5^q$. On distingue ici deux sous-cas, selon que k est premier avec 10 ou non.

II A – Premier sous-cas : k est premier avec 10.

On fixe $k \in \mathbb{N}$ premier avec 10 et l'on va montrer que la suite $\left(\dfrac{S(n)}{S(kn)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas majorée. On commence par un lemme classique.

Lemme 2. *Tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ premier avec 10 admet un multiple dont l'écriture décimale comporte uniquement des 1. De plus, il existe un tel multiple dont l'écriture décimale comporte moins de k chiffres (au sens large).*

Preuve — Une preuve possible consiste à considérer les k entiers

$$1,\ 11,\ 111,\ \ldots,\ \underbrace{11\ldots1}_{k \text{ fois}}.$$

En prenant les restes modulo k, on obtient k valeurs dans $[[0, k-1]]$. Si l'un de ces restes est nul, le résultat est établi. Sinon, on a k restes dans $[[1, k-1]]$ donc deux des nombres considérés, disons a et b avec $a < b$, ont même reste modulo k et le nombre $b - a$ est un multiple de k. Par ailleurs, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que

$$b - a = 1\ldots10\ldots0 = 1\ldots1 \times 10^j.$$

Puisque k divise $b - a$ et que k est premier avec 10, k divise $1\ldots1$. Notons que, dans ce multiple de k, le nombre de 1 est inférieur ou égal à k.

On possède maintenant deux entiers d et m tels que

$$dk = \underbrace{11\dots1}_{k\text{ fois}} \quad \text{avec } m \in [[1, k]].$$

On a donc $9dk = \underbrace{9\dots9}_{k\text{ fois}}$. Pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, on considère les nombres

$$\mathrm{M}_x = 9dk \times \left(\sum_{i=0}^{x-1} 10^{mi}\right) = \underbrace{\underbrace{9\dots9}_{m\text{ fois}}\dots\underbrace{9\dots9}_{m\text{ fois}}}_{x\text{ fois}} = 10^{mx} - 1.$$

et

$$\mathrm{N}_x = \underbrace{\underbrace{9\dots9}_{m\text{ fois}}\dots\underbrace{9\dots9}_{m\text{ fois}}}_{x\text{ fois}} + \underbrace{1\dots1}_{m\text{ fois}} = 1\ \underbrace{0\dots0}_{m(x-1)\text{ fois}}\ \underbrace{1\dots1}_{m\text{-}1\text{ fois}}0 = 10^{mx} + kd - 1. \tag{4}$$

Notons que N_x est un multiple de k puisque

$$\mathrm{N}_x = k \times n_k \text{ où } n_x = d\left(9\sum_{i=0}^{x-1} 10^{mi} + 1\right).$$

L'écriture décimale de N_x en base 10 (égalité (4)) donne

$$\mathrm{S}(k \times n_x) = m. \tag{5}$$

Par ailleurs, puisque $k \geq 2$,

$$9d < 10d < 9kd = 10^m - 1 < 10^m,$$

donc

$$\mathrm{S}(n_x) = \mathrm{S}\left(\sum_{i=0}^{x-1} 9d10^{mi} + 10d\right) = (x-1)\mathrm{S}(9d) + \mathrm{S}(d). \tag{6}$$

Les relations (5) et (6) montrent que la suite $\left(\dfrac{\mathrm{S}(n)}{\mathrm{S}(kn)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas majorée.

Prenons l'exemple de $k = 7$ pour lequel $d = 15\,873$, $kd = 111\,111$ et $m = 6$. Le nombre $\mathrm{M}_x = 999\,999 \dots 999\,999$ dans lequel le motif 999 999 apparaît x fois est bien un multiple de 7 et s'écrit

$$\mathrm{M}_x = 7 \times 9 \times 15\,873 \times \sum_{i=0}^{x-1} 10^{6i}.$$

Ainsi,

$$\mathrm{N}_x = 10^{6x} + 111\,110 = 7n_x.$$

et, comme annoncé,

$$\mathrm{S}(7n_x) = 6.$$

Par ailleurs,

$$n_x = 15\,873\left(9\sum_{i=0}^{x-1} 10^{6i} + 1\right) = 142\,857\sum_{i=0}^{x-1} 10^{6i} + 15\,873,$$

donc

$$S(n_x) = (x-1)S(142\,857) + S(15\,873) = 27(x-1) + 24.$$

Ainsi,

$$\frac{S(n_x)}{S(7n_x)} = \frac{27}{6}(x-1) + 8 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

II B – Second sous-cas : *k* n'est pas premier avec 10.

On fixe $k = 2^p \times 5q \times k_0$ avec p, q, $k_0 \in \mathbb{N}$, $p + q > 0$ et $k_0 \geq 3$ premier avec 10. On introduit l'entier m défini dans la partie II.A associé à k_0 ainsi que l'entier n_x pour $x \in \mathbb{N}^*$. On va montrer que

$$\frac{S(2^q \times 5^p \times n_x)}{S(k \times 2^q \times 5^p \times n_x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Puisque

$$S(k \times 2^q \times 5^p \times n_x) = S(10^{p+q} \times k_0 \times n_x) = S(k_0 \times n_x) = m$$

par construction de n_x, il suffit de montrer que

$$S(2^q \times 5^p \times n_x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

D'après l'encadrement (3) établi dans la partie I (les rôles de p et q étant inversés), on a avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = 5$,

$$\frac{S(n_x)}{S(2^q \times 5^p \times n_x)} \leq \frac{5^p}{2^q},$$

donc

$$S(2^q \times 5^p \times n_x) \geq \frac{2^q}{5^p} S(n_x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,$$

ce qui achève la résolution du problème.

III - Questions en suspens

Une question naturelle est la généralisation à une base quelconque $b \geq 2$. En notant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_b(n)$ la somme des chiffres dans l'écriture de n en base b, les entiers $k \in \mathbb{N}^*$ tels que la suite $\left(\frac{S_b(n)}{S_b(kn)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit majorée sont-ils ceux dont la factorisation ne fait apparaître que des facteurs premiers de b ?

D'autres questions intéressantes seraient par exemple de déterminer, pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$ donné,

1. la densité des entiers n tels que $\frac{S(n)}{S(kn)} = p$, p étant fixé ;

2. la limite quand N tend vers $+\infty$ des moyennes de Césaro, $\dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\dfrac{S(n)}{S(kn)}$.

Solution d'Emmanuel Moreau (Dublin) – Si k n'est pas de la forme 2^p5^q avec $p, q \in \mathbb{N}$, le nombre $\dfrac{1}{k}$ n'est pas décimal et par conséquent, $S\left(\left[\dfrac{10^l}{k}\right]+1\right)$ tend vers $+\infty$ quand l tend vers $+\infty$. On suppose l supérieur au nombre de chiffres de k et l'on pose $n_l = \left[\dfrac{10^l}{k}\right]+1$. L'encadrement

$$\frac{10^l}{k} < \left[\frac{10^l}{k}\right]+1 \leq \frac{10^l}{k}+1$$

implique

$$10^l < kn_l \leq 10^l + k,$$

donc

$$S(kn_l) \leq \max\left\{S(10^l + i)\,;\, i \in [\![1,k]\!]\right\} \leq k+1,$$

cette dernière inégalité étant justifiée par le fait que, pour l supérieur au nombre de chiffres de k et i dans $[[1, k]]$,

$$S(10^l + i) = 1 + S(i) \leq 1 + i \leq 1 + k.$$

Finalement,

$$\frac{S(n_l)}{S(kn_l)} \geq \frac{S(n_l)}{k+1} \xrightarrow[l\to+\infty]{} +\infty.$$

On s'intéresse maintenant au cas où k est de la forme 2^p5^q avec $p, q \in \mathbb{N}$. On étend naturellement la définition de S à tout nombre décimal. On va montrer que si x, y sont des nombres décimaux (strictement positifs), $S(xy) \leq S(x)S(y)$.
On sait déjà que pour m, $n \in \mathbb{N}^*$, $S(m+n) \leq S(m) + S(n)$. Ensuite, pour m, $n \in \mathbb{N}^*$, on décompose n en base 10 :

$$n = \sum_{j=0}^{s}\varepsilon_j 10^j, \quad \varepsilon_j \in [\![0,9]\!].$$

On a alors

$$S(mn) = S\left(\sum_{j=0}^{s}\varepsilon_j 10^j m\right) \leq \sum_{j=0}^{s} S\left(\varepsilon_j 10^j m\right) \leq \sum_{j=0}^{s} S\left(\varepsilon_j m\right)$$

$$\leq S(m)\sum_{j=0}^{s} S\left(\varepsilon_j\right) = S(m)S(n).$$

La sous-multiplicativité de S s'étend alors aux nombres décimaux (strictement positifs) en remarquant que pour x décimal, $S(x) = S(10x)$.

Ainsi, si k est de la forme 2^p5^q, le nombre $\frac{1}{k}$ est décimal et donc

$$S(n) = S\left(kn \times \frac{1}{k}\right) \leq S(kn)S\left(\frac{1}{k}\right),$$

donc

$$\frac{S(n)}{S(kn)} \leq S\left(\frac{1}{k}\right).$$

Ainsi, la suite $\left(\frac{S(n)}{S(kn)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par $S\left(\frac{1}{k}\right)$, cette majoration étant optimale puisque l'entier n tel que $kn = 10^{\max(p,q)}$ fournit un cas d'égalité.

Emmanuel Moreau termine sa belle contribution en remarquant que l'on peut donner une expression plus simple de $S\left(\frac{1}{k}\right)$, à savoir $S\left(2^{|p-q|}\right)$. En effet, si $k = 2^p5^q$ avec par exemple $p \geq q$ (le cas $p < q$ est similaire),

$$S\left(\frac{1}{k}\right) = S\left(\frac{1}{2^p5^q}\right) = S\left(\frac{10^p}{2^p5^q}\right) = S\left(2^{p-q}\right).$$

Voici pour finir quelques exemples numériques :

k	2	4	5	8	10	16	20	25	32	40	50	80	128
$S\left(\frac{1}{k}\right)$	5	7	2	8	1	13	5	4	11	7	2	8	23

Problème 484-2

Soit G un groupe. Un élément $g \in$ G est dit mou si, pour toute partie $A \subset G$ génératrice de G, $A - \{g\}$ reste génératrice. Montrer que l'ensemble des éléments mous est un sous-groupe de G. Trouver les éléments mous des groupes $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$, puis $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution de Pierre Renfer (Saint George d'Orques) –

(1) Pour montrer que l'ensemble des éléments mous est un sous-groupe de G, on remarque qu'un élément g de G est mou si pour toute partie B non génératrice de G, la partie $B \cup \{g\}$ reste non génératrice. On note $\langle B \rangle$ le sous-groupe de G engendré par une partie B de G. Soit g, h deux éléments mous de G et B une partie non génératrice de G. Alors $B \cup \{g\}$ n'est pas génératrice, et $B \cup \{g,h\}$ non plus. Or

$$\langle \mathrm{B} \cup \{gh^{-1}\} \rangle \subset \langle \mathrm{B} \cup \{g,h\} \rangle \neq \mathrm{G},$$

donc gh^{-1} est mou. Pour conclure, le neutre est évidemment un élément mou.

(2) On montre que le seul élément mou de $(\mathbb{Z},+)$ est 0. Il est clair que ± 1 ne sont pas mous puisqu'ils sont générateurs. Soit a un élément de $\mathbb{Z} - \{0,\pm 1\}$. En prenant $b \in \mathbb{Z} - \{0,\pm 1\}$ premier avec a, le théorème de Bézout montre que la partie $\{a,b\}$ est génératrice de $\mathbb{Z}$ alors que $\{b\}$ ne l'est pas. Donc a n'est pas mou.

(3) On étudie les éléments mous de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ pour $n \geq 2$. Soit $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ la décomposition de n en produit de facteurs premiers. Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $\bar{a}$ la classe de a modulo n. On va montrer que $\bar{a}$ est mou si et seulement si $p_1 \dots p_k$ divise a. En particulier, $\bar{0}$ est le seul élément mou de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ si et seulement si n est sans facteur carré.

Si a est divisible par $p_1 \dots p_k$, si B est une partie non génératrice de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, le sous-groupe engendré par B admet un générateur $\bar{b}$ où b est un diviseur de n autre que ± 1. Dans ce cas, $\langle \mathrm{B} \cup \{\bar{a}\} \rangle = \langle \bar{d} \rangle$ où d est le pgcd de a et b. Comme d est divisible par l'un des p_i, $\langle \mathrm{B} \cup \{\bar{a}\} \rangle \neq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\bar{a}$ est mou.

Si a n'est pas divisible par $p_1 \dots p_k$, a est par exemple premier avec p_1 et alors $\{\bar{a}, \bar{p}_1\}$ est génératrice de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tandis que $\{\bar{p}_1\}$ ne l'est pas. Donc $\bar{a}$ n'est pas mou.

(4) On montre maintenant que tous les éléments de $(\mathbb{Q},+)$ sont mous. Puisque les éléments mous forment un sous-groupe de $(\mathbb{Q},+)$, il suffit de montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et tout p premier, le rationnel $\frac{1}{p^\alpha}$ est mou, l'ensemble de ces rationnels formant une partie génératrice de $(\mathbb{Q},+)$. Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Q},+)$ ne contenant pas $\frac{1}{p^\alpha}$. Il s'agit de montrer que $\mathrm{H} \cup \left\{\frac{1}{p^\alpha}\right\}$ n'engendre pas $\mathbb{Q}$. Le sous-groupe $\left(\frac{1}{p^\alpha}\mathbb{Z}\right) \cap \mathrm{H}$ est engendré par un élément $\frac{a}{p^\alpha}$ où a est un entier différent de ± 1. On distingue deux cas, selon que a est une puissance de p ou non.

(4.a) Dans le cas où a n'est pas une puissance de p, on considère q un facteur premier de a, autre que p. Alors

$$\left(\frac{1}{p^\alpha}\mathbb{Z}\right) \cap \mathrm{H} \subset \frac{q}{p^\alpha}\mathbb{Z},$$

donc $\mathbb{Z} \cap \mathrm{H} \subset q\mathbb{Z}$ car si x est dans $\mathbb{Z} \cap \mathrm{H} \subset \dfrac{q}{p^\alpha}\mathbb{Z}$, x s'écrit $\dfrac{kq}{p^\alpha}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et, comme p et q sont premiers, p^α divise k. Si une fraction irréductible $\dfrac{u}{v}$ appartient à H, u appartient à $\mathbb{Z} \cap \mathrm{H}$, donc u est divisible par q alors que v ne l'est pas. Ainsi, H est contenu dans $\mathbb{Q}_{(q)}$, sous-groupe de $(\mathbb{Q},+)$ formé des fractions irréductibles dont le dénominateur n'est pas divisible par q. La partie $\mathrm{H} \cup \left\{\dfrac{1}{p^\alpha}\right\}$ est alors contenue dans $\mathbb{Q}_{(q)}$, sous-groupe strict de $(\mathbb{Q},+)$, donc $\dfrac{1}{p^\alpha}$ est mou.

(4.b) Si a est une puissance de p, $\left(\dfrac{1}{p^\alpha}\mathbb{Z}\right) \cap \mathrm{H} \subset \dfrac{1}{p^{\alpha-1}}\mathbb{Z}$ et alors H est contenu dans le sous-groupe $\mathrm{G}(\alpha)$ des fractions irréductibles dont le dénominateur n'est pas divisible par p^a. En effet, si une fraction irréductible $\dfrac{u}{p^\alpha v}$ appartenait à H, $\dfrac{u}{p^\alpha}$ appartiendrait à $\left(\dfrac{1}{p^\alpha}\mathbb{Z}\right) \cap \mathrm{H} \subset \dfrac{1}{p^{\alpha-1}}\mathbb{Z}$, donc u serait divisible par p, ce qui est absurde. La partie $\mathrm{H} \cup \left\{\dfrac{1}{p^\alpha}\right\}$ est alors contenue dans le sous-groupe strict $\mathrm{G}(\alpha + 1)$ et n'est donc pas génératrice.

Compléments sur le sous-groupe de Frattini –

(1) Si $(\mathrm{G},\cdot)$ est un groupe, on appelle sous-groupe de Frattini de G l'ensemble des éléments mous de G. Notons le F(G) et montrons qu'il est l'intersection des sous-groupes (propres) de G maximaux pour l'inclusion (s'il en existe). Si g est un élément mou de G et H un sous-groupe maximal de G, comme H n'est pas génératrice, $\mathrm{H} \cup \{g\}$ ne l'est pas non plus, donc $\mathrm{H} \subset \langle \mathrm{H} \cup \{g\} \rangle \neq \mathrm{G}$, ce qui, par maximalité de H, impose $\mathrm{H} = \langle \mathrm{H} \cup \{g\} \rangle$, c'est à dire $g \in \mathrm{H}$. Réciproquement, si un élément g de G appartient à l'intersection des sous-groupes maximaux de G, si B est une partie de G non génératrice, $\langle \mathrm{B} \rangle$ est un sous-groupe propre de G donc est contenu dans un sous-groupe maximal, disons H, et alors la partie $\mathrm{B} \cup \{g\}$ est encore contenue dans H donc n'est toujours pas génératrice.

(2) Puisque les sous-groupes maximaux du groupe $(\mathbb{Z},+)$ sont les $p\mathbb{Z}$ pour p premier, le groupe de Frattini de $\mathbb{Z}$ est bien réduit à $\{0\}$.

(3) Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ sont les $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour d divisant n. Pour d, d' divisant n, l'inclusion $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \subset d'\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ équivaut à la divisibilité de d' par d. Les sous-groupes maximaux de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ sont donc les $p\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour p premier divisant n. Si l'on note p_1, …, p_k les facteurs premiers de n, l'intersection des sous-groupes maximaux de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ est donc $r\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où $r = p_1\ldots, p_k$ est le radical de n.

(4) Puisque tout élément de $(\mathbb{Q},+)$ est mou, il n'existe pas de sous-groupe maximal dans $(\mathbb{Q},+)$.

(5) On peut ainsi trouver les éléments mous du groupe $(\mathrm{S}_n,\circ)$ des permutations de $[[1, n]]$. Il suffit pour cela de montrer que pour $i \in [[1, \mathrm{n}]]$, le stabilisateur de i

$$\mathrm{Stab}(i) = \left\{\sigma \in \mathrm{S}_n \,\middle|\, \sigma(i) = i\right\}$$

est un sous-groupe maximal de S_n. Le seul élément mou de S_n, devant laisser fixe chaque $i \in [[1, n]]$, est bien $\mathrm{id}_{[[1,n]]}$. Fixons donc $i \in [[1, n]]$ et montrons que Stab(i) est un sous-groupe maximal. Prenons $\sigma \in \mathrm{S}_n - \mathrm{Stab}(i)$, posons $j = \sigma(i) \neq i$ et montrons que le sous-groupe $\mathrm{H} = \langle \mathrm{Stab}(i) \cup \sigma \rangle$ contient S_n. Pour $p \in [[1, n]] - \{i,j\}$, la permutation $(p, j)\circ\sigma$ envoie i sur p. Puisque (p,j) laisse fixe i, la permutation $(p, j)\circ\sigma$ appartient à H. On peut ainsi trouver dans H un élément qui envoie i sur n'importe quel élément de $[[1, n]]$. Maintenant, si φ est une permutation quelconque de $[[1, n]]$, notons $p = \varphi(i)$ et prenons $\tau \in$ H envoyant i sur p. Alors $\tau^{-1}\circ\varphi$ envoie i sur i donc $\tau^{-1}\circ\varphi$ appartient à Stab(i) et φ appartient à H.