Hippocampe et dragon

Catherine Combelles(*)

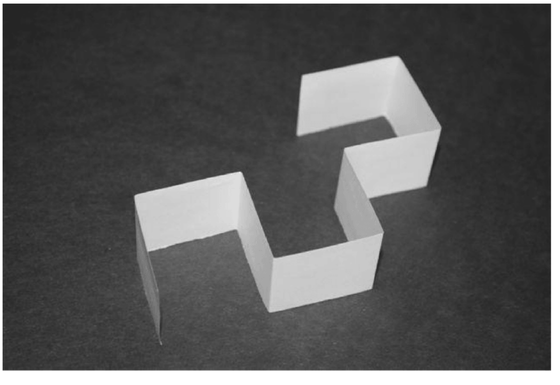
Au cours d'un stage Hippocampe[1] organisé par l'IREM d'Aix-Marseille, mes élèves de spécialité maths de TS ont eu le privilège de travailler sous la direction de Pierre Arnoux sur les fractals. Un des sujets de recherche a été le codage de la courbe du dragon.

Les professeurs des élèves en stage ne sont pas censés participer au travail, mais comment résister à chercher soi-même lorsqu'on se trouve devant un problème intéressant ? Un des groupes a programmé à l'aide du logiciel SAGE le dessin de la courbe. Sous mes yeux admiratifs, ils ont rapidement pu utiliser ce bel outil dont ils ignoraient tout en arrivant et, avec l'appui de Vincent Delecroix, qui fut un mentor remarquablement efficace, ils ont réalisé des dessins que l'on pourra admirer sur le site de l'IREM d'Aix-Marseille à l'adresse suivante :

http://sage.irem.univ-mrs.fr/hippocampe/fractals_23_01_2010.html

Quant à moi, la question qui m'a surtout passionnée est le codage de cette courbe sous forme d'une suite de mots.

La courbe du dragon est la courbe engendrée par la modélisation du pliage d'une bande de papier. Bruno Alaplantive a réalisé cette photo, qui remplace bien des discours :

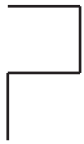


On plie en 2, puis en 4, puis en 8, etc., et toujours dans le même sens une bande de papier et l'on examine de profil la suite des plis obtenus, en les disposant tous à angle droit. Voici les premières étapes de la courbe obtenue :

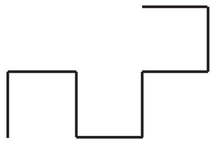
(*) catherine.combelles@gmail.com

(1) On trouvera sur le site de l'IREM d'Aix-Marseille
http://www.irem.univmrs.fr/IMG/pdf/presentationHippo07-08.pdf
la description détaillée de ce dispositif, qui permet à une classe de travailler pendant trois jours avec des chercheurs dans les locaux de l'IREM.

puis



puis



On s'intéressera ici à la forme de la courbe et non aux longueurs des segments qu'on prendra toutes identiques. On appelle C_n la courbe obtenue après avoir plié n fois : on a dessiné ici C_1, C_2 et C_3. Comment prévoir la suite et comment la coder ?

Une façon de la représenter est de la considérer comme une suite de vecteurs de translations que l'on peut nommer par les points cardinaux : E, S, O, N pour Est, Sud, Ouest, et Nord. Les termes de la suite apparaissent alors comme une suite de mots M_n, de longueur 2^n, écrits à l'aide des lettres E, S, O, N.

En reprenant les dessins ci-dessus, les quatre premiers sont : M_0 = E ; M_1 = ES ; M_2 = ESOS ; M_3 = ESOSONOS

Pour trouver la suite, une solution s'obtient en réfléchissant au processus de construction : on constate que chaque mot de la suite commence par le mot précédent. C'est bien une propriété générale : quand on plie n fois, on plie d'abord une fois en deux, puis on plie $(n - 1)$ fois. Lorsqu'on déplie, on déplie d'abord $(n - 1)$ fois, et on obtient la courbe C_{n-1} en double épaisseur de papier, puis le dernier « dépliage » donne une duplication de cette courbe : une épaisseur de papier reproduit C_{n-1}, l'autre réalise une rotation de $\pi/2$ de cette courbe C_{n-1} autour de son dernier point.

La première moitié du mot M_{n+1} est donc le mot M_n. La deuxième moitié demande un peu de soin : il faut d'une part inverser l'ordre des lettres, (le début de la courbe C_{n-1} après rotation devient la fin de la courbe C_n), et faire tourner nos points cardinaux de $-\pi/2$ (il faut changer de sens les vecteurs après la rotation de $\pi/2$, pour continuer à « avancer » sur la courbe.)

Nous appellerons s la substitution définie par : $\begin{cases} \mathrm{E} \to \mathrm{S} \\ \mathrm{N} \to \mathrm{E} \\ \mathrm{O} \to \mathrm{N} \\ \mathrm{S} \to \mathrm{O} \end{cases}$, et nous appellerons r la fonction qui inverse l'ordre des lettres d'un mot.

En notant « · » l'opération de concaténation entre deux mots, on obtient :

$$\mathrm{M}_{n+1} = \mathrm{M}_n \cdot r \cdot s(\mathrm{M}_n).$$

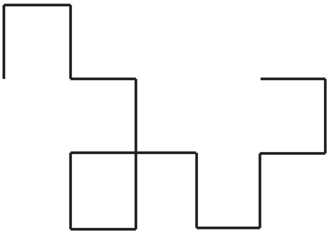
Écrire M_4 est alors un jeu d'enfant :

$$\text{ESOSONOS} \xrightarrow{s} \text{SONONENO} \xrightarrow{r} \text{ONENONOS}.$$

Il ne reste plus qu'à réécrire M_3 devant ce résultat pour trouver M_4 qui s'écrit donc :

$$\mathrm{M}_4 = \text{ESOSONOSONENONOS},$$

ce qui permet de dessiner C_4 :



Les élèves ont trouvé cette méthode de construction. Mais ils n'ont pas trouvé un deuxième procédé que leur a indiqué Pierre Arnoux : on obtient la même suite de mots en remplaçant simplement dans M_n E par ES, S par OS, O par ON et N par EN !

Vérifions-le sur les premiers termes de la suite en partant de E : E donne ES, qui donne ESOS, qui donne ESOSONOS, qui donne ESOSONOSONENONOS. Ce sont bien les mots trouvés plus haut.

Mais comment prouver que les deux procédés construisent la même suite ? C'est ce problème-là que j'ai cherché, et j'ai été ravie de trouver !

Appelons σ la substitution définie par $\begin{cases} \text{E} \to \text{ES} \\ \text{S} \to \text{OS} \\ \text{O} \to \text{ON} \\ \text{N} \to \text{EN} \end{cases}$.

Remarquons d'abord que les fonctions r, s et σ ont vis-à-vis de l'opération de concaténation (concaténer les mots A et B, c'est simplement écrire B à la suite de A) les propriétés suivantes :

Étant donnés deux mots A et B,

$$r(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}) = r(\mathrm{B}) \cdot r(\mathrm{A}),$$
$$s(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}) = s(\mathrm{A}) \cdot s(\mathrm{B}),$$
$$\sigma(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}) = \sigma(\mathrm{A}) \cdot \sigma(\mathrm{B}).$$

Prouvons alors par récurrence que les deux procédés construisent la même suite de mots (M_n).

On l'a déjà vérifié pour les premiers termes, il reste à prouver que si les deux suites sont identiques jusqu'à n, les deux procédés construisent le même mot M_{n+1}.

On suppose donc que $\mathrm{M}_n = \mathrm{M}_{n-1} \cdot r \circ s\left(\mathrm{M}_{n-1}\right)$.

La fonction σ transforme alors M_n en : $\sigma\left(\mathrm{M}_n\right) = \sigma\left(\mathrm{M}_{n-1} \cdot r \circ s\left(\mathrm{M}_{n-1}\right)\right)$, par hypothèse de récurrence. C'est aussi, par la propriété vue plus haut :

$$\sigma\left(\mathrm{M}_n\right) = \sigma\left(\mathrm{M}_{n-1}\right) \cdot \sigma\left(r \circ s\left(\mathrm{M}_{n-1}\right)\right).$$

Mais, par hypothèse, $\sigma\left(\mathrm{M}_{n-1}\right) = \mathrm{M}_n$. Donc :

$$\sigma\left(\mathrm{M}_n\right) = \boxed{\mathrm{M}_n \cdot \sigma \circ r \circ s\left(\mathrm{M}_{n-1}\right)}.$$

Alors que le premier procédé de fabrication transforme M_n en :

$$\mathrm{M}_n \cdot r \circ s\left(\mathrm{M}_n\right) = \mathrm{M}_n \cdot r \circ s\left(\sigma\left(\mathrm{M}_{n-1}\right)\right) = \boxed{\mathrm{M}_n \cdot r \circ s \circ \sigma\left(\mathrm{M}_{n-1}\right)}.$$

On constate qu'il suffit alors, pour conclure, de prouver l'égalité : $\sigma \circ r \circ s = r \circ s \circ \sigma$.

Qu'en est-il pour les quatre lettres de départ ?

$$\mathrm{O} \xrightarrow{s} \mathrm{N} \xrightarrow{r} \mathrm{N} \xrightarrow{\sigma} \mathrm{EN} \quad \text{et} \quad \mathrm{O} \xrightarrow{\sigma} \mathrm{ON} \xrightarrow{s} \mathrm{NE} \xrightarrow{r} \mathrm{EN},$$

$$\mathrm{N} \xrightarrow{s} \mathrm{E} \xrightarrow{r} \mathrm{E} \xrightarrow{\sigma} \mathrm{ES} \quad \text{et} \quad \mathrm{N} \xrightarrow{\sigma} \mathrm{EN} \xrightarrow{s} \mathrm{SE} \xrightarrow{r} \mathrm{ES},$$

$$\mathrm{E} \xrightarrow{s} \mathrm{S} \xrightarrow{r} \mathrm{S} \xrightarrow{\sigma} \mathrm{OS} \quad \text{et} \quad \mathrm{E} \xrightarrow{\sigma} \mathrm{ES} \xrightarrow{s} \mathrm{SO} \xrightarrow{r} \mathrm{OS},$$

$$\mathrm{S} \xrightarrow{s} \mathrm{O} \xrightarrow{r} \mathrm{O} \xrightarrow{\sigma} \mathrm{ON} \quad \text{et} \quad \mathrm{S} \xrightarrow{\sigma} \mathrm{OS} \xrightarrow{s} \mathrm{NO} \xrightarrow{r} \mathrm{ON}.$$

Les images par les deux fonctions des quatre lettres de base sont bien identiques.

Il reste à prouver alors que si les fonctions donnent les mêmes images de deux mots A et B, elles donnent aussi les mêmes images de leur concaténation A · B : tout mot étant construit par concaténations successives à partir des quatre lettres, cela prouvera bien l'égalité des deux fonctions sur l'ensemble des mots.

Supposons donc acquis que :

$$\sigma \circ r \circ s(\mathrm{A}) = r \circ s \circ \sigma(\mathrm{A}) \text{ et } \sigma \circ r \circ s(\mathrm{B}) = r \circ s \circ \sigma(\mathrm{B}).$$

Alors, en utilisant les propriétés vues plus haut de nos fonctions r, s et σ, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sigma \circ r \circ s(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}) &= \sigma \circ r\left(s(\mathrm{A}) \cdot s(\mathrm{B})\right) \\
&= \sigma\left(r \circ s(\mathrm{B}) \cdot r \circ s(\mathrm{A})\right) \\
&= \sigma \circ r \circ s(\mathrm{B}) \cdot \sigma \circ r \circ s(\mathrm{A}) \\
&= r \circ s \circ \sigma(\mathrm{B}) \cdot r \circ s \circ \sigma(\mathrm{A}) \quad \text{(par hypothèse)} \\
&= r\left(s \circ \sigma(\mathrm{A}) \cdot s \circ \sigma(\mathrm{B})\right) \\
&= r \circ s\left(\sigma(\mathrm{A}) \cdot \sigma(\mathrm{B})\right) \\
&= r \circ s \circ \sigma(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien prouvé l'égalité $\sigma \circ r \circ s = r \circ s \circ \sigma$, et on a fini de démontrer que les deux procédés construisent bien le même mot M_{n+1} à partir du mot M_n.

Ce que je trouve intéressant dans cette histoire, c'est qu'au départ, la solution du problème me paraissait tout à fait hors de portée, et offrait peu de piste usuelle. Mais un peu d'analyse de la situation, et la manipulation de composée de fonctions permet finalement de le résoudre assez facilement !

Les stages Hippocampe peuvent être passionnants aussi pour les professeurs !