Solution du problème d'antan nº 7

Georges Lion

Voici la solution au problème paru dans le Bulletin nº 487 et proposée par un fidèle lecteur, Georges LION. Nous tenons à le remercier pour sa fidèle participation à cette rubrique.

Ceci est la dernière rubrique. Elle avait été initiée pour préparer le centenaire de notre association.

1. Solution à l'ancienne

L'énoncé semble accepter de bonne grâce que sans démonstration, le lieu de A soit reconnu comme un arc passant par B et C et contenu dans un cercle γ.

1.1. Calcul des angles i_1 et i_2

On note b et c les angles du triangle ABC en B et C. Alors

$$i_1 = \pi - \left(b + \frac{\pi - b}{2} + \frac{c}{2}\right) = \frac{\pi - b - c}{2} = \frac{a}{2}$$

et de même $i_2 = \dfrac{a}{2}$.

1.2. Localisation de I_1 et I_2

D'après 1), ces deux points appartiennent à l'arc capable de l'angle $\dfrac{a}{2}$ construit sur le segment [BC] du même côté que A. Cet arc est contenu dans un cercle γ dont $[I_1I_2]$ est un diamètre puisque les angles $\widehat{I_1BI_2}$ et $\widehat{I_1CI_2}$ sont droits.

Soit J le centre de ce cercle. J est aligné avec I_1, I_2 et A puisque (I_1I_2) est la bissectrice extérieure de $\widehat{BAC}$. J étant fixe, il suffit pour préciser sa position d'examiner le cas particulier de AB = AC. Alors les points A et J sont confondus à l'intersection du cercle γ et de la médiatrice de [BC] du même côté que A.

1.3. Limitation des lieux

Soit B′ le deuxième point d'intersection de Γ et de (CJ) et I_1' un point de l'arc $\overset{\frown}{BB'}$. La droite $(I_1'J)$ recoupe γ en A′ et, J étant le milieu d'un arc $\overset{\frown}{BC}$, alors $(A'J)$ est une bissectrice de l'angle $\widehat{BA'C}$ (théorème de l'angle inscrit) ; il s'agit de la bissectrice extérieure car cette droite est extérieure au triangle A′BC. D'où I_1' est, à l'intersection avec γ, le centre du cercle exinscrit au triangle BA′C dans l'angle $\widehat{C}$.

De même pour le lieu du point I_2, à savoir l'arc $\overset{\frown}{CC'}$ où C′ est le deuxième point d'intersection de (BJ) avec γ.

2. Solution actuelle

Lorsque cela n'était pas nécessaire je n'ai pas cherché de nouveaux arguments pour remplacer les anciens. Il en va ainsi de la première question. En revanche la seconde question mérite un examen nouveau puisque le théorème de l'angle inscrit n'est plus applicable dans le contexte actuel ainsi que me l'ont confirmé de nombreux professeurs. Certains manuels en font mention, mais sans démonstration. Aussi il m'a paru plus judicieux d'avoir recours à la condition de cocyclicité de quatre points. Certes cette propriété n'est pas non plus au programme, mais au moins les angles orientés y sont. Pour démontrer cette condition et, après des recherches dans des annales récentes, j'ai choisi d'« algébriser » le plan à l'aide des nombres complexes.

Lemme : *Si quatre points* T, U, V, W *sont cocycliques alors on a :*

$$\left(\overrightarrow{TV},\overrightarrow{TW}\right)=\left(\overrightarrow{UV},\overrightarrow{UW}\right)\quad(\text{mod}\,\pi).$$

Démonstration : On se place dans $\mathbb{C}$ rapporté à un repère tel que le cercle de l'énoncé soit tangent à l'axe réel en O et qu'il ait pour centre le point d'affixe i.

a) Pour $z\neq 0$, on pose $z'=\dfrac{1}{\overline{z}}$. Alors

$$(z-\mathrm{i})(\overline{z}+\mathrm{i})=\left(\frac{1}{\overline{z'}}-\mathrm{i}\right)\left(\frac{1}{z'}+\mathrm{i}\right)=\frac{1}{z'\overline{z'}}\left[z'\overline{z'}+1+\mathrm{i}\left(z'-\overline{z'}\right)\right],$$

d'où

$$|z-\mathrm{i}|=1\Leftrightarrow 1+\mathrm{i}\left(z'-\overline{z'}\right)=0\Leftrightarrow \Im z'=\frac{1}{2}.$$

b) Soit t, u, v, w les affixes des quatre points. Alors sachant l'alignement des quatre points d'affixes t', u', v', w', on a :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{TV},\overrightarrow{TW}\right)-\left(\overrightarrow{UV},\overrightarrow{UW}\right)&=\arg\left[\frac{w-t}{v-t}+\frac{w-u}{v-u}\right]\\&=\arg\overline{\left[\frac{t'-w'}{t'-v'}+\frac{u'-w'}{u'-v'}\right]}=0\quad(\text{mod}\,\pi).\end{aligned}$$

Remarque : La réciproque du lemme est vraie à condition d'ajouter à la conclusion : « ou alignés ».

Soit γ le cercle circonscrit au triangle ABC et [IJ] le diamètre de γ perpendiculaire à (BC), avec J du même côté de (BC) que A. En appliquant le lemme ci-dessus on trouve :

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AJ}\right)=\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IJ}\right)\quad(\text{mod}\,\pi).$$

$$\left(\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IC}\right) \pmod{\pi}.$$

Les angles écrits à droite sont congrus par raison de symétrie, les deux autres le sont donc aussi et cela entraîne que (AJ) est la bissectrice extérieure de $\widehat{BAC}$.

Revenant au problème proprement dit on termine à peu près comme en 1926 : Soit H_1 et H_2 les projetés de I_1 et I_2 sur (BC). Rappelant les relations

$$CH_1 = BH_2 = \text{demi-périmètre de ABC},$$

il vient que J est le milieu de $[I_1I_2]$, segment qui est un diamètre du cercle passant par B et C donc de centre J.

Réciproquement en prolongeant [BJ] et [CJ] on définit sur ce cercle deux arcs $\overset{\frown}{BB'}$ et $\overset{\frown}{CC'}$. Un point A′ étant donné sur γ, les intersections de ces arcs avec la droite (JA′) bissectrice extérieure de $\widehat{BA'C}$, sont nécessairement les centres des cercles exinscrits au triangle A′BC.