Exercices de-ci, de-là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par Mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

Jean Fromentin, 17 rue de la Roussille, 79000 NIORT.

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial, une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 488-1 : Bruno Alaplantive – Calgary (L'association maintient le cap : Pour les maths !)

$$\frac{\text{CAP}}{\text{PLM}} = .\text{APMEP APMEP APMEP}\ldots$$

Dans cette fraction et sa notation décimale, de période de longueur 5, chaque lettre représente un chiffre différent.
La notation est à l'anglo-saxonne avec un point à la place de la virgule et le zéro n'est pas écrit.
À l'instar de notre chère centenaire, la fraction est naturellement irréductible !
Déterminer la solution et son unicité.

Exercice 488-2 : Amstramgram ? (d'après des olympiades australiennes de 1993)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, les sommets d'un triangle ABC sont de coordonnées entières. Les côtés ne portent aucun autre point de coordonnées entières et il n'y a qu'un seul point, G, de coordonnées entières à l'intérieur du triangle.
Prouver que G est le centre de gravité du triangle.

Exercice 488-3 (issu de la compétition austro-polonaise de mathématiques de 1994)

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est telle que pour tout nombre réel x, on a :

$$f(x+19) \leq f(x)+19 \text{ et } f(x+94) \geq f(x)+94.$$

Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x+1)=f(x)+1$.

Exercice 488-4 : L'exercice de géométrie (d'après des olympiades canadiennes de 1997)

Un parallélogramme ABCD et un point intérieur O sont tels que

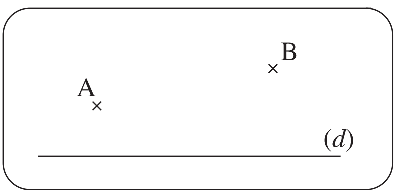
$$\widehat{AOB}+\widehat{COD}=180°.$$

Prouver que l'on a $\widehat{OBC}=\widehat{ODC}$.

Solutions

Exercice 486-1 : Un classique sous contrainte

Construire le point M de (d) qui minimise MA + MB, sans sortir du cadre.



Solutions

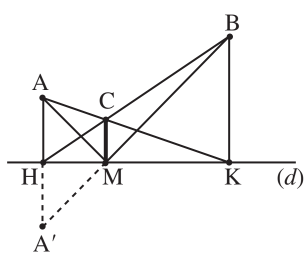
J'emprunte à Georges Lion sa très jolie remarque : « on peut raisonner sans contrainte… » !

Il s'agira donc de partir et/ou de se ramener à « la » solution connue qui utilise le symétrique A′ de A par rapport à (d).

Solution de Jean Fromentin (Niort) et Maryvonne Leberre (Lyon)

On peut éventuellement trouver la construction de C, *puis de* M *sans avoir placé* A′, *a priori ; mais il semble qu'on n'y échappe pas pour la démonstration.*

– *Soit directement comme le propose Jean Fromentin :*



A′ symétrique de A par rapport à (d), (AK) et (HB) se coupent en C.

(AA′) // (BK), (BA′) coupe (d) en M.

D'après le théorème de Thalès, $\dfrac{\mathrm{MH}}{\mathrm{MK}}\left(=\dfrac{\mathrm{MA'}}{\mathrm{MB}}\right)=\dfrac{\mathrm{HA'}}{\mathrm{KB}}$.

De même $\left(\dfrac{\mathrm{CH}}{\mathrm{CB}}=\right)\dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CK}}=\dfrac{\mathrm{HA}}{\mathrm{BK}}$. Or HA = HA′. Donc $\dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CK}}=\dfrac{\mathrm{MH}}{\mathrm{MK}}$.

De ce fait, (MC) // (AH).

Cette condition nécessaire est aussi suffisante. Ainsi pour trouver le point M il suffira de construire le point C et d'en abaisser la perpendiculaire sur (d).

– Soit indirectement, en montrant l'égalité des angles $\widehat{\mathrm{AMH}}$ et $\widehat{\mathrm{BMK}}$ – égalité connue pour être équivalente à l'alignement de A′, M et B – comme le propose Maryvonne Leberre :

Les droites (AH), (CM) et (BK) sont par construction perpendiculaires à (d), donc parallèles entre elles.

En appliquant le théorème de Thalès aux triangles AHK et CMK, puis BHK et HCM, on obtient $\mathrm{BK}\cdot\mathrm{HM}=\mathrm{AH}\cdot\mathrm{MK}$, et donc $\dfrac{\mathrm{HM}}{\mathrm{AH}}=\dfrac{\mathrm{MK}}{\mathrm{BK}}$.

On en déduit l'égalité des angles $\widehat{\mathrm{AMH}}$ et $\widehat{\mathrm{BMK}}$ (1) qui permet bien de conclure à l'alignement des points A′, M et B.

Solution de Alain Corre (Moulins)

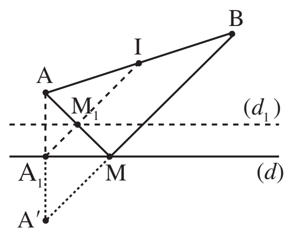
On « ramène A′ dans le cadre » par homothétie de centre A et de rapport 1/2.

– $A_1 = h(A')$ est la projection orthogonale de A sur (d) ;

– $(d_1) = h((d))$ est la médiatrice du segment $[AA_1]$;

– $I = h(B)$ est le milieu du segment [AB] ;

– $M_1 = h(M)$ est à l'intersection de (A_1I) et (d_1).



Dans ces conditions, le point M est l'image de M_1 par l'homothétie inverse (de centre A et de rapport 2), c'est-à-dire l'intersection de (d) et de (AM_1).

Solution de François Drouin (IUFM de Lorraine)

On « ramène A′ dans le cadre » par translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{A'H}}$.

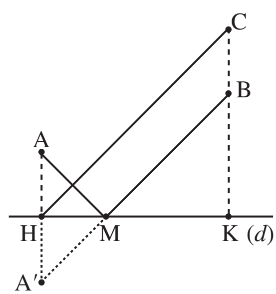
C est l'image de B par cette translation.

A′BCH est un parallélogramme.

Il suffit donc de construire C, puis [CH], puis la parallèle qui passe par B.

Elle coupe (d) en M.

Remarque : cette solution nécessite un espace suffisant au-dessus du point B dans le cadre.

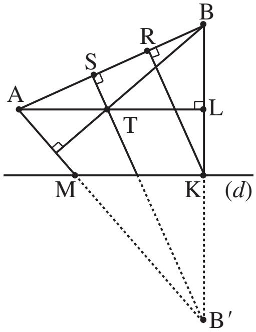


(1) Le même travail pourrait être présenté avec les tangentes dans les triangles rectangles, sans évoquer Thalès.

Solution de Giovanni Ranieri (Melun)

Configuration :

Si B′ est le symétrique de B par rapport à (d), il est clair que le point M recherché est l'intersection de [AB′] et (d). Il s'agit de construire le côté [AB′] sans le point B′ (en restant du même côté de (d)). Pour cela nous allons construire les trois hauteurs du triangle ABB′.



Description de la construction du point M :

– tracer [AB] et le projeté orthogonal K de B sur (d) ;
– placer R, projeté orthogonal de K sur (AB) et S, symétrique de B par rapport à R ;
– placer L, projeté orthogonal de A sur (BK) ;
– mener la perpendiculaire à (AB) passant par S, elle coupe (AL) en T ;
– mener la perpendiculaire à (BT) passant par A, elle coupe (d) en M.

Démonstration :

En utilisant le théorème des milieux dans le triangle BB′S, on démontre que (B′S) = (ST) est une hauteur du triangle ABB′. Par construction, (AL) est la hauteur issue de A dans ce même triangle ; et donc T est l'orthocentre de ce triangle. Par conséquent, (BT) est la troisième hauteur, on détermine ainsi le troisième côté du triangle ABB′, perpendiculaire à (BT) passant par A. Celle-ci coupe (d) en M.

Autres solutions : Michel Sarrouy (Mende), Richard Beczkowski (Chalon-sur-Saône), Georges Lion (Wallis).

Nota. Une reprise de ces solutions, complétée d'une proposition d'activité de découverte et de validation de la position du point M sans recours à la symétrie, vous est proposée en supplément en ligne au BV sur le site national.

Exercice 486-2 : B. Lefebvre – Namur

Démontrer le critère de divisibilité par 7 suivant.

Le reste de la division d'un nombre entier par 7 s'obtient par cette méthode peu connue : on multiplie le premier chiffre de gauche par 3, puis on ajoute le chiffre suivant ; on multiplie le résultat par 3, puis on ajoute le chiffre suivant ; et ainsi de suite.

Le calcul se simplifie, si l'on prépare le nombre proposé en retranchant 7 à chacun de ses chiffres supérieurs ou égaux à 7 et si, dans le cours de l'opération, on retranche à chaque résultat avant de le multiplier par 3 le nombre 7 ou tout multiple de 7, s'il s'en trouve.

Par exemple, soit N = 196 874, ou 126 104.

$1 \times 3 + 2 = 5$; $5 \times 3 + 6 = 21$, ou 0 ; $0 \times 3 + 1 = 1$; $1 \times 3 + 0 = 3$; $3 \times 3 + 4 = 13$ ou 6 ; R = 6.

Solution de Alain Corre (Moulins)

Considérons un entier N et son écriture en base 10 : $\mathrm{N} = \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i$.

Dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, on a $N \equiv b_n \times 3^n + \ldots + b_1 \times 3 + b_0$ modulo 7, où les b_i sont les représentants des a_i dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.
En utilisant l'algorithme de HÖRNER, on a :

$$N \equiv \left(\left(\left(b_n \times 3 + b_{n-1}\right) \times 3 + b_{n-2}\right) + \ldots + b_1\right) \times 3 + b_0 \text{ modulo } 7,$$

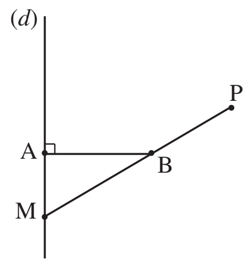
ce qui permet d'obtenir par l'algorithme proposé le reste de la division de N par 7.

Autres solutions : Michel Sarrouy (Mende), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Robert Bourdon (Tourgeville).
Remarque. Pour Michel Sarrouy, le critère est une curiosité, sans plus. Il est sans doute peu connu, mais cette méconnaissance doit être due à la relative inefficacité de l'algorithme. Pour 12 904 par exemple, on peut, à vue et en s'appuyant sur les mêmes lemmes, remplacer 12 (milliers) par 5 (milliers), 9 (centaines) par 2 (centaines) et travailler avec 5 204. Avec ce nouveau nombre, on peut remplacer 52 (dizaines) par 3 (dizaines). Le nouveau nombre est 304 qui comporte 30 dizaines qui peuvent à leur tour être remplacées par 2 d'où le nombre 24, lui-même remplaçable par 3. Ce raisonnement repose entièrement sur une bonne connaissance des résultats de la table de multiplication par 7 et ne nécessite aucune mémorisation d'algorithme.

Nota. J'ai tiré cet exercice du livre intitulé Cours développé d'Algèbre élémentaire, par B. Lefebvre S.J, édité à Namur en 1897 (2 tomes), consultable et téléchargeable sur Gallica.

Exercice 486 - 3 : M. Guisnée – Paris

Soient un segment [AB] et (d) sa perpendiculaire en A. On choisit un point M pris sur (d) et on construit le point P de la demi-droite [MB), qui n'appartient pas au segment [MB] qui vérifie : PB × BM = AB².



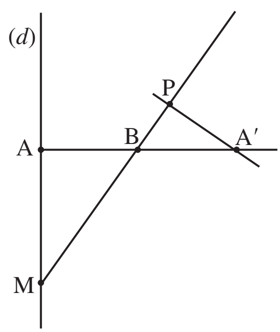
Déterminer le lieu de P lorsque M varie sur (d).

(Donner, si possible, une solution par géométrie analytique et une solution « purement » géométrique).

Géométrie « pure »

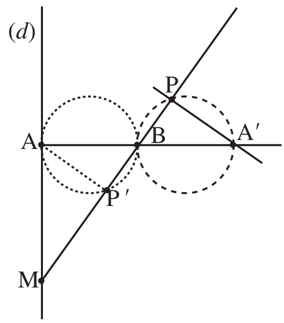
Solution de Albert Marcout (Sainte Savine)

- P est défini par M, B, P alignés et $\overline{BP} \times \overline{BM} = -a^2$. P est donc l'image de M par l'inversion de centre B et de puissance $-a^2$. L'ensemble des P est ainsi le transformé de la droite par cette inversion. C'est donc le cercle centré sur la droite (AB) qui passe par B et par l'image A′ de A, où A′ est donc le symétrique de A par rapport à B $\left(\overline{BA'} \times \overline{BA} = -a^2\right)$.



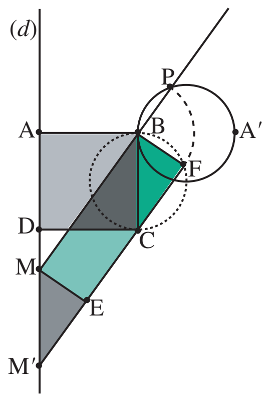
- Peut-être l'inversion n'est plus étudiée ? dans ce cas :
  P étant un point de l'ensemble, désignons par A′ le point commun de la droite (AB) et de la perpendiculaire à (MP) en P. A et P appartiennent au cercle de diamètre [MA′]. La puissance p de B par rapport à ce cercle s'exprime par :
  $$p = \overline{\mathrm{BA'}} \times \overline{\mathrm{BA}} = \overline{\mathrm{BP}} \times \overline{\mathrm{BM}} = -\mathrm{BA}^2.$$
  Alors $\overline{\mathrm{BA'}} = -\overline{\mathrm{BA}}$, A′ est le symétrique de A par rapport à B et P appartient au cercle de diamètre [BA′]. P décrit tout le cercle puisque la droite (BM) balaie le plan.
- Peut-être la notion de puissance n'est plus au programme ?
  Dans ce cas on utilisera la similitude des triangles BAM et BPA′ pour retrouver A′ comme symétrique de A par rapport à B.

Solution de Richard Beczkowski (Chalon-sur-Saône)



- Le symétrique P′ de P par rapport à B est tel que
  $$\mathrm{BP'} \cdot \mathrm{BM} = \mathrm{AB}^2,$$
  ce qui est le propre du pied de la hauteur issue de A dans le triangle BAM rectangle en A.
  Quand M décrit (d), le point P′ décrit entièrement le cercle de diamètre [AB] si on considère B obtenu à partir de M à l'infini sur (d)(2).
  Ainsi P décrit le cercle symétrique par rapport à B.

Solution de Bruno Alaplantive (Calgary)



- Construisons P à la manière d'Euclide, en utilisant les grandeurs. AB² est l'aire du carré de côté AB. On trace le carré ABCD. Le parallélogramme MBCM′, de même base et de même hauteur, a la même aire, ainsi que le rectangle MBFE.

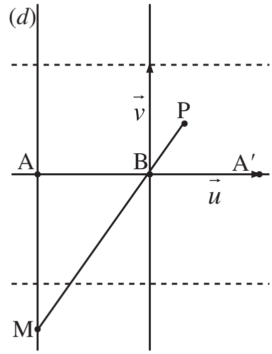
  L'angle $\widehat{\mathrm{BCF}}$ étant droit, F appartient donc au cercle de diamètre [BC]. Quand M décrit (d), le point F décrit entièrement ce cercle. P étant l'image de F par le quart de tour indirect de centre B, il décrit donc le cercle image dont le diamètre est [BA′] où A′, image de C, est également le symétrique de A par rapport à B.

Géométrie analytique

Solution de Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques)

Dans le plan complexe rapporté au repère $\left(\mathrm{B}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, les points A, M et P sont d'affixes respectives -1, z et z' ; la droite (d) a pour équation : $x = -1$.

(2) J'ai reçu autant de réponses acceptant B que le rejetant…



La construction de P se traduit par :

$$|z|\cdot|z'|=1 \text{ et } \arg(z')=\arg(z)+\frac{\pi}{2}.$$

Posant $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, on obtient :

$$z'=\frac{1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=-\frac{1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=-\frac{1}{k\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}=-\frac{1}{\bar{z}}.$$

Notre inversion f fait donc correspondre au point M, d'affixe z, le point P d'affixe $-\dfrac{1}{\bar{z}}$.

Elle est involutive ($f^{-1}=f$). Le point P appartient à $f(d)$ si et seulement si le point f(P) appartient à (d), c'est-à-dire si et seulement si l'affixe $p=x+\mathrm{i}y$ de P ($p\neq 0$) vérifie :

$$\mathrm{Re}\left(-\frac{1}{\bar{p}}\right)=-1,\text{ soit } \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\bar{p}}\right)=1\ ;\ \frac{1}{p}+\frac{1}{\bar{p}}=2\ ;\ p+\bar{p}=2p\bar{p}\ ;\ 2x=2\left(x^2+y^2\right)\ ;$$

d’où *finalement*

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

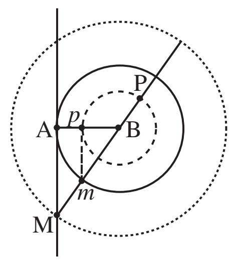
On reconnaît là l'équation du cercle de diamètre [BA’].

Autres solutions : Patrice Lacour (?), Alain Corre (Moulins), Jean Gounon (Chardonnay), F. Agnan (Die), Michel Sarrouy (Mende), Georges Lion (Wallis).

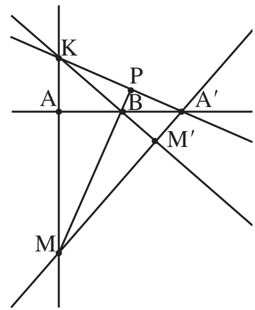
Remarques :

- D’autres propositions sans l’utilisation des nombres complexes, traduisaient les conditions par $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ colinéaires et $\overrightarrow{\mathrm{BM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=-\mathrm{AB}^2$, les rendant ainsi accessibles dès la Première.

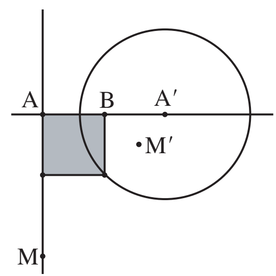
  Celle exposée par Pierre Renfer permet la construction du point P ci-après :
  Le cercle de centre B passant par A étant supposé de rayon égal à 1 et celui passant par M, de rayon k, on construit les points m et p montrés sur la figure.
  Le cercle de centre B passant par p est ainsi de rayon $1/k$; d’où l’obtention du point P.



- Une construction sur Geogebra.
  Le menu des transformations offre la possibilité de l’inversion : inversion d’un point par rapport à un cercle dont le centre est le pôle et le carré du rayon la puissance. L’inversion à trouver doit avoir une puissance positive.
  (A′P) coupe (*d*) en K. Puisque (AA′) et (MP) sont deux hauteurs du triangle MA′K, alors B en est l’orthocentre et (KB) est la troisième hauteur.



$$\begin{aligned} A'M' \times A'M &= \overrightarrow{A'M'} \cdot \overrightarrow{A'M} \\ &= \overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{A'M} \\ &= \overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{A'A} \\ & 2AB^2 \end{aligned}$$



  M et M′ sont images l’un de l’autre par l’inversion de pôle A′ et de puissance 2 AB².
  Le cercle qu’utilisera Geogebra pour l’inversion est par conséquent le cercle de centre A′ et de rayon $\sqrt{2}AB$.

Nota.
Dans son « Application de l’algèbre à la géométrie » parue en 1733, *feu Monsieur Guisnée de l’Académie Royale des Sciences, professeur Royal de Mathématique, et ancien Ingénieur ordinaire du Roy*, n’utilisait ni complexes ni produit scalaire…
Le livre est téléchargeable sur Google books.