# Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à
Max HOCHART
13, rue des Garennes
63800 Cournon d'Auvergne
ou par courriel à
hochartmax@yahoo.fr

## Énoncés des nouveaux problèmes

### Problème 488-1 (Question de Louis-Marie Bonneval)

Le Bon, la Brute, le Truand s'affrontent dans un ultime combat. Ils sont d'habiletés inégales : le Bon atteint sa cible deux fois sur trois, la Brute une fois sur deux, le Truand une fois sur trois. Le combat se déroule en rounds successifs où chacun vise son adversaire le plus dangereux, et où ils tirent en même temps (à chaque round, les résultats des tirs sont donc indépendants). Ces rounds se répètent tant qu'il reste au moins deux adversaires. Quelle est la probabilité pour chacun de gagner le combat ? Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun survivant ? Combien de rounds peut-on s'attendre à ce que dure le combat ?

### Problème 488-2

Soit $u$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 4u_n + \sqrt{15u_n^2 + 1}$. Cette suite est-elle à valeurs entières ?

### Problème 488-3

Pour un entier $n > 6$, on note P($n$) l'ensemble $\{k \in [[1,n]] \mid \text{pgcd}(n,k) = 1\}$.
Trouver les $n$ pour lesquels les éléments de P($n$) sont en progression arithmétique.

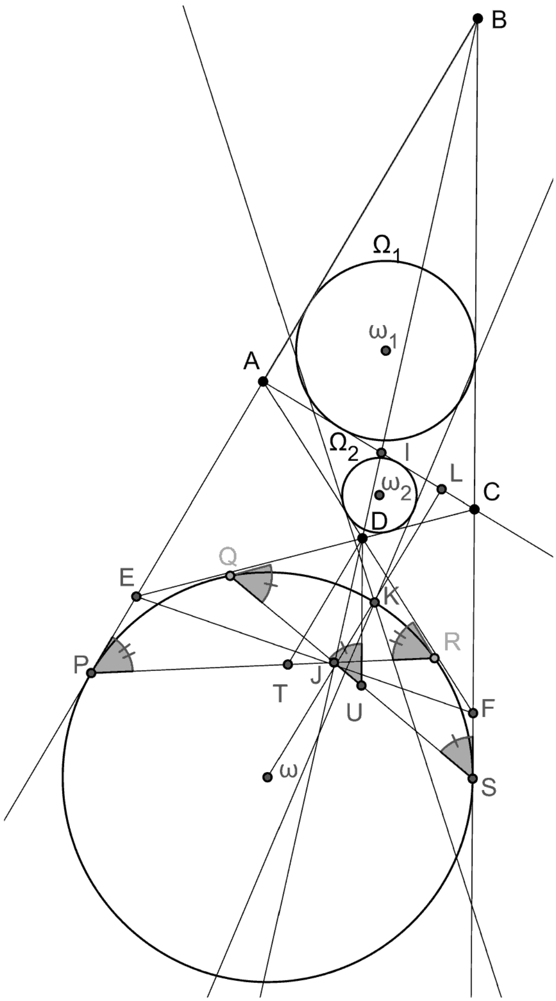
## Solutions des problèmes antérieurs

### Problème 479-6 (Olympiades internationales 2008)

Soit ABCD un quadrilatère convexe tel que AB ≠ BC. Les cercles inscrits dans les triangles ABC et ADC sont notés respectivement $\Omega_1$ et $\Omega_2$. On suppose qu'il existe un cercle $\Omega$ qui est tangent à la demi-droite [BA) au-delà de A, tangent à la demi-droite [BC) au-delà de C et qui est aussi tangent aux droites (AD) et (CD). Montrer que les tangentes communes extérieures à $\Omega_1$ et $\Omega_2$ se coupent en un point de $\Omega$.

**Solution de Georges Lion (Wallis)**

(1) On a supposé que le cercle Ω était tangent aux droites (AD) et (CD). Ainsi, le quadrilatère ABCD ne peut avoir deux côtés parallèles. Soit E l'intersection des droites (AB) et (CD), F celle de (AD) et (BC). Par le simple usage du théorème de Thalès, on va démontrer la propriété qui faisait l'objet de l'exercice de ci de là 479-3[1], à propos maintenant du quadrilatère AEDF (non croisé, non convexe, circonscrit à Ω).




Les points de contact P, Q, R, S étant comme indiqués dans la figure ci-dessus, T et U construits au moyen des parallèles à (BP) et (BS) menées par D et (BD) coupant [PR] en J, on a :

(1) L'énoncé est le suivant : soit ABCD un quadrilatère inscrit dans un cercle Γ. Le quadrilatère convexe MNPQ est circonscrit à Γ et tel que A ∈ [MN], B ∈ [NP], C ∈ [PQ] et D ∈ [QM]. Montrer que les diagonales (AC), (BD), (MP) et (NQ) sont concourantes.

$$\frac{\mathrm{JD}}{\mathrm{JB}}=\frac{\mathrm{DT}}{\mathrm{BP}}=\frac{\mathrm{DR}}{\mathrm{BP}}.$$

De même, si (BD) coupe [QS] en J′, on a :

$$\frac{\mathrm{J'D}}{\mathrm{J'B}}=\frac{\mathrm{DU}}{\mathrm{BS}}=\frac{\mathrm{DQ}}{\mathrm{BS}}=\frac{\mathrm{DR}}{\mathrm{BP}},$$

si bien que J = J′ et que (BD), (QS) et (PR) sont concourantes.
La même méthode donne le concours de (EF), (QS), (PR) en un point noté désormais J, pôle de la droite (AC) par rapport au cercle Ω.

(2) Le centre I de l'homothétie de rapport négatif envoyant $\Omega_1$ sur $\Omega_2$ appartient à (AC), tangente commune intérieure à ces deux cercles. De plus, en composant l'homothétie de centre B de rapport positif envoyant $\Omega_1$ sur Ω et l'homothétie de centre D de rapport négatif envoyant Ω sur $\Omega_2$, on obtient l'alignement des points B, I, D. Le point I est donc l'intersection des droites (AC) et (BD).

Notant $\omega$, $\omega_1$, $\omega_2$ les centres respectifs des cercles de même nom, rappelons que les tangentes communes donnent les alignements ($\omega$, $\omega_1$, B), ($\omega$, D, $\omega_2$) et ($\omega_1$, I, $\omega_2$). La polaire Δ de B par rapport au couple de droites (CE), (AF) passe par D. Cette droite est aussi la polaire de B par rapport au couple (AC), (EF). Les points alignés I, J, B, D (voir les points 1 et 2) forment une division harmonique. La droite ($\omega$J), conjuguée harmonique de ($\omega$I) par rapport au couple ($\omega\omega_1$), ($\omega\omega_2$), contient le centre de l'homothétie de rapport positif envoyant $\Omega_1$ sur $\Omega_2$. Ce centre est le point recherché dans le problème.

(3) Le point J étant le pôle de (AC) par rapport à Ω, les droites ($\omega$J) et (AC) sont perpendiculaires en un point L. Soit K en lequel Ω coupe [$\omega$J), Z à l'intersection de (AC) et ($\omega$D), $r$ et R les rayons respectifs de $\Omega_2$ et Ω. Si $\rho = \omega\mathrm{L}$, alors $\omega\mathrm{J}=\dfrac{\mathrm{R}^2}{\rho}$.

Les birapports

$$[\mathrm{J},\mathrm{L},\mathrm{K},\omega]=\left(\mathrm{R}-\frac{\mathrm{R}^2}{\rho}\right)\times\frac{-\rho}{\mathrm{R}^2}\times\frac{\rho}{\rho-\mathrm{R}}=-\frac{\rho}{\mathrm{R}}$$

et

$$[\mathrm{D},\mathrm{Z},\omega_2,\omega_1]=-\frac{r}{\mathrm{R}}\times\frac{\rho}{r}=-\frac{\rho}{\mathrm{R}}$$

sont égaux. Sachant l'alignement de I, D, J et celui de I, Z, L, on en déduit l'alignement de I, $\omega_2$, K. Ce point K est le centre de l'homothétie cherché et appartient à Ω.

**Remerciements**. – Un grand merci à **Aude Sainfort** et **Franck Gautier** pour leur aide et leur talent de dessinateurs.

### Problème 482-1 (Question de Michel Lafond)

Un quadrilatère convexe a des côtés de mesures 6, 7, 8 et 11 et une aire de mesure 60. Est-il inscriptible ?

**Solutions de Maurice Bauval (Versailles), Marie-Laure Chaillout (Épinay-sur-Orge), Bernard Collignon (Coursan), Frédéric de Ligt (Montguyon), Franck Gautier (Pérignat-lès-Sarliève), Michel Lafond (Dijon), George Lion (Wallis), André Stoll (Eckbolsheim).**

Dans une solution très courte, **George Lion** distingue deux cas. Dans le premier cas, les côtés de longueurs 8 et 11 sont adjacents en un sommet noté A. Si C est le sommet opposé à A, le théorème d'Al-Kashi permet d'écrire

$$6^2 + 7^2 - 84\cos\widehat{C} = 8^2 + 11^2 - 176\cos\widehat{A},$$

c'est-à-dire

$$44\cos\widehat{A} - 21\cos\widehat{C} = 25. \qquad (1)$$

Par ailleurs, la condition imposée aux aires conduit à

$$44\sin\widehat{A} + 21\sin\widehat{C} = 60. \qquad (2)$$

Soit $\vec{U}$ et $\vec{V}$ les deux vecteurs du plan euclidien de coordonnées respectives $\left(\cos\widehat{A}, \sin\widehat{A}\right)$ et $\left(-\cos\widehat{C}, \sin\widehat{C}\right)$ dans une base orthonormée. Les relations déjà établies donnent

$$44\vec{U} + 21\vec{V} = \vec{W}$$

où le vecteur $\vec{W}$ a pour coordonnées (25, 60) et est donc de norme

$$\left\|\vec{W}\right\| = \sqrt{25^2 + 60^2} = 65 = 44 + 21 = 44\left\|\vec{U}\right\| + 21\left\|\vec{V}\right\|.$$

D'après le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire, les vecteurs unitaires $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont égaux et sont de même sens que $\vec{W}$, d'où les relations

$$\tan\widehat{A} = \frac{12}{5} = -\tan\widehat{C}.$$

L'inscription du quadrilatère convexe étudié en découle.

Dans le second cas, les côtés de longueurs 7 et 11 sont adjacents en un sommet noté A. Notant C le sommet opposé, un calcul analogue conduit aux relations

$$\tan\widehat{A} = \frac{24}{7} = -\tan\widehat{C}$$

et à la même conclusion.

**Maurice Bauval**, **Bernard Collignon** et **Frédéric de Ligt** établissent des relations du type (1) et (2) et somment leurs carrés pour en déduire la relation $\cos\left(\widehat{A} + \widehat{C}\right) = -1$, c'est-à-dire $\widehat{A} + \widehat{C} = \pi$, d'où le résultat.

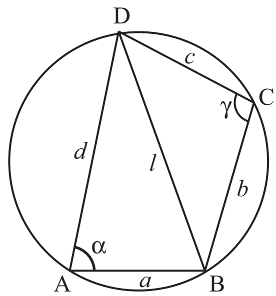
En complément, **Maurice Bauval** donne une valeur approchée de la longueur du rayon du cercle dans lequel s'inscrit le quadrilatère. Si R est la longueur cherchée, on peut inscrire dans un cercle de rayon R une ligne brisée formée par quatre segments de mesures 6, 7, 8, 11. Cette ligne se referme en un quadrilatère inscriptible si et seulement si

$$\arcsin\left(\frac{6}{2R}\right)+\arcsin\left(\frac{7}{2R}\right)+\arcsin\left(\frac{8}{2R}\right)+\arcsin\left(\frac{11}{2R}\right)=\pi.$$

Maurice Bauval trouve alors pour valeur approchée $R \simeq 5,866\,719\,933\ldots$ Le logiciel *Maple* fournit la valeur exacte $R=\frac{5}{27}\sqrt{793}$. On revient dans quelques lignes sur ce calcul.

Dans une autre approche, **André Stoll** utilise le théorème de Ptolémée(2). Les calculs, relativement proches de ceux exposés ci-dessus, sont tout de même plus longs.

Pour une troisième méthode, et en toute généralité, **Marie-Laure Chaillout** note ABCD le quadrilatère convexe, $a$, $b$, $c$, $d$ les côtés AB, BC, CD, DA, $\alpha$ et $\gamma$ les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$, puis $l$ la longueur de la diagonale BD et enfin $\mathcal{A}$ l'aire du quadrilatère.




En calculant les aires des triangles ABD et BCD,

$$\mathcal{A}=\frac{ad\sin(\alpha)+bc\sin(\gamma)}{2}. \qquad (3)$$

Par Al-Kashi,

$$l^2=a^2+d^2-2ad\cos(\alpha)=b^2+c^2-2bc\cos(\gamma). \qquad (4)$$

Donc

$$ad\cos(\alpha)-bc\cos(\gamma)=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2}$$

et

$$ad\sin(\alpha)+bc\sin(\gamma)=2\mathcal{A}.$$

En sommant les carrés de ces deux dernières relations,

$$a^2d^2+b^2c^2-2abcd\cos(\alpha+\gamma)=4\mathcal{A}^2+\frac{\left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)^2}{4}.$$

Le quadrilatère ABCD est inscriptible si et seulement si $\cos(\alpha+\gamma)=-1$, donc si et seulement si

$$4\mathcal{A}^2=a^2d^2+b^2c^2+2abcd-\frac{\left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)^2}{4},$$

soit enfin si et seulement si

(2). Un quadrilatère convexe ABCD est inscriptible si et seulement si

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD.$$

$$\mathcal{A}^2 = \frac{1}{16}(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d). \qquad (5)$$

Cette expression, symétrique en $a$, $b$, $c$, $d$, permet de conclure puisqu'en prenant $\{a,b,c,d\} = \{6,7,8,11\}$, on trouve qu'un quadrilatère dont les côtés mesurent 6, 7, 8 et 11 est inscriptible si et seulement si $\mathcal{A} = 60$.

Utilisant aussi des expressions symétriques en $a$, $b$, $c$, $d$, **Franck Gautier** fournit la valeur exacte du rayon R du cercle dans lequel s'inscrit le quadrilatère. En reportant la relation $\sin(\alpha) = \frac{1}{2\mathrm{R}}$ dans (3), et puisque $\gamma = \pi - \alpha$, on trouve

$$\mathcal{A} = \frac{ad+bc}{4\mathrm{R}}l. \qquad (6)$$

Or (4) donne

$$bcl^2 = bc\left(a^2+d^2\right) - 2abcd\cos(\alpha)$$

et

$$adl^2 = ad\left(b^2+c^2\right) + 2abcd\cos(\alpha)$$

d'où

$$(ad+bc)l^2 = bc\left(a^2+d^2\right) + ad\left(b^2+c^2\right) = (ab+cd)(ac+bd).$$

Ainsi,

$$l = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}.$$

Finalement, avec la relation (5), on obtient

$$\mathrm{R} = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4\mathcal{A}}.$$

Cette expression symétrique permet de calculer

$$\mathrm{R} = \frac{5}{27}\sqrt{793} \simeq 4,866\,719\,933.$$

Dans la seconde partie de sa solution, **Bernard Collignon** signale que la formule (5) établie dans la solution de **Marie-Laure Chaillout** est due au mathématicien indien Brahmagupta (598-670) et se présente souvent sous la forme

$$\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \qquad (7)$$

où $p$ est le demi-périmètre

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c+d).$$

Cette formule redonne l'aire d'un carré ($a = b = c = d$), d'un rectangle ($a = c$ et $b = d$) et, plus remarquable, d'un triangle puisque $d = 0$ redonne la formule de Héron.

Dans la troisième partie de sa solution, **Bernard Collignon** montre, que parmi les quadrilatères articulés dont les mesures des côtés sont 6, 7, 8 et 11, le quadrilatère inscriptible est celui qui possède l'aire maximale, égale ici à 60. Pour une aire quelconque, les relations (1) et (2) sont :

$$44\cos\widehat{\mathrm{A}} - 21\cos\widehat{\mathrm{C}} = 25 \text{ et } 44\sin\widehat{\mathrm{A}} + 21\sin\widehat{\mathrm{C}} = \mathcal{A}.$$

En mettant au carré et en sommant, on obtient

$$\mathcal{A}^2 = 1752 - 1848\cos(\alpha+\gamma).$$

L'aire maximale est obtenue pour $\alpha + \gamma = \pi$ (quadrilatère inscriptible) et vaut effectivement $\sqrt{1752+1848} = 60$.

Prolongeant cette idée, l'auteur de cette très jolie question, **Michel Lafond**, cite la formule de Bretschneider : l'aire d'un quadrilatère convexe de côtés $a$, $b$, $c$, $d$ et d'angles opposés $\alpha$ et $\gamma$ vaut

$$\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)} \tag{8}$$

où $p$ désigne toujours le demi-périmètre. Dans cette formule, peu importe les angles opposés $\alpha$ et $\gamma$ choisis puisque les deux autres, disons $\beta$ et $\delta$, vérifient $\beta + \delta = 2\pi - \alpha - \gamma$, donc $\cos^2\left(\frac{\beta+\delta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$. Cette relation est plus forte que celle de Brahmagupta(3), et montre de façon élémentaire que l'aire d'un quadrilatère dont les mesures des côtés sont fixés est bien maximale lorsque le quadrilatère est inscriptible ($\alpha + \gamma = \pi$). Dans notre cas, et puisque dans cette formule $a$, $b$, $c$, $d$ jouent des rôles symétriques, l'aire vaut

$$\sqrt{3600 - 3696\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)},$$

donc est toujours inférieure ou égale à $\sqrt{3\,600} = 60$, le cas d'égalité correspondant au cas où $\alpha + \gamma = \pi$. Pour démontrer cette formule de Bretschneider, on transforme la relation (4) en

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2ad\cos(\alpha) - 2bc\cos(\gamma),$$

puis on élève au carré :

$$\left(a^2 + d^2 - b^2 - c^2\right)^2 = 4a^2d^2\cos^2(\alpha) + 4b^2c^2\cos^2(\gamma) - 8abcd\cos(\alpha)\cos(\gamma).$$

Par ailleurs, la relation (3) élevée au carré donne, après multiplication par 4,

$$16\mathcal{A}^2 = 4a^2d^2\sin^2(\alpha) + 4b^2c^2\sin^2(\gamma) - 8abcd\sin(\alpha)\sin(\gamma).$$

En sommant ces deux relations,

(3) Elle la redonne en prenant $\alpha + \gamma = \pi$.

$$\begin{aligned}\left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)^2+16\mathcal{A}^2 &= 4\left(a^2d^2+b^2c^2\right)-8abcd\cos(\alpha+\gamma)\\ &= 4(ad+bc)^2-8abcd\left(1+\cos(\alpha+\gamma)\right)\\ &= 4(ad+bc)^2-16abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right).\end{aligned}$$

Finalement,

$$16\mathcal{A}^2=4(ad+bc)^2-\left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)^2-16abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right).$$

On transforme maintenant $4(ad+bc)^2-\left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)^2$ en

$$\begin{aligned}&\left(2ad+2bc+a^2+d^2-b^2-c^2\right)\left(2ad+2bc-a^2-d^2+b^2+c^2\right)\\ &=\left[(a+d)^2-(b-c)^2\right]\left[(b+c)^2-(a-d)^2\right]\\ &=(a+d-b+c)(a+d+b-c)(b+c-a+d)(b+c+a-d)\\ &=16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).\end{aligned}$$

Après division par 16, on obtient

$$\mathcal{A}^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right).$$

qui est la formule voulue.

**Michel Lafond** précise que le site *http://mathworld.wolfram.com* conteste la paternité de cette formule, précisant que Bretschneider n'avait donné en 1842 qu'une formule moins intéressante pour l'aire d'un quadrilatère, à savoir

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\sqrt{4l^2m^2-\left(b^2+d^2-a^2-c^2\right)^2}.$$

où $m$ = AC (et toujours $l$ = BD, $a$ = AB, $b$ = BC, $c$ = CD, $d$ = DA). Ce serait Coolidge qui aurait donné en 1939 la formule (8).