Exercices de-ci, de-là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par Mél à :
bruno.alaplantive@free.fr
ou par courrier à :
Jean Fromentin, 17 rue de la Roussille, 79000 NIORT.

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial, une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 487-1 : Daniel Reisz – Auxerre (d'après la Compétition mathématique des pays Baltes 2004)

Soit un rectangle ABCD de dimensions 3×4. Sur chaque coté on choisit un point. Ces quatre points sont les sommets d'un quadrilatère convexe dont les cotés mesurent x, y, z et t. Encadrer au mieux la somme $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$.

Exercice 487-2 : Pythagore sans les carrés... ?

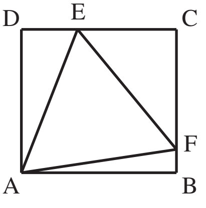
Démontrer que : dans un triangle rectangle, la somme des côtés de l'angle droit est égale à la somme des diamètres des cercles inscrit et circonscrit.

Exercice 487-3 Arithmétique

Trouver toutes les solutions de l'équation $6\,(a\,! + 3) = b^2 + 5$ où a et b sont des entiers naturels.

Exercice 487-4

ABCD est un rectangle, AEF un triangle équilatéral où E et F sont sur [DC] et [CB].
Quelle relation lie les aires des triangles ADE, AFB et ECB ?



Solutions

Exercice 484-3 : Question du concours australien de mathématiques 2008 (transmis par Georges Lion)

Les entiers positifs x et y vérifient $3x^2 - 8y^2 + 3x^2y^2 = 2\,008$. Quelle est la valeur de xy ?

Solution de Bernard Cottignon (Coursan)

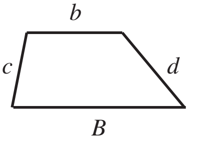
On utilise: $3x^2 - 8y^2 + 3x^2y^2 = (3x^2 - 8)\,(y^2 + 1) + 8$.
D'où: $3x^2 - 8y^2 + 3x^2y^2 = 2\,008 \Leftrightarrow (3x^2 - 8)\,(y^2 + 1) = 2\,000$.
$2\,000 = 2^4 \times 5^3$ donc 2 000 possède $(4 + 1) \times (3 + 1) = 20$ diviseurs qui se regroupent deux par deux.
On a les dix couples : (1 ; 2 000), (2 ; 1 000), (4 ; 500), (5 ; 400), (8 ; 250), (10 ; 200), (16 ; 125), (20 ; 100), (25 ; 80), (40 ; 50).
Parmi les 20 diviseurs de 2 000, seulement quatre peuvent s'écrire $y^2 + 1$ avec y entier positif : ce sont les nombres 2, 5, 10 et 50 qui correspondent respectivement aux valeurs 1, 2, 3 et 7 de y.
1° cas : $y = 1$, $y^2 + 1 = 2$ d'où : $3x^2 - 8 = 1000$ et donc ne mène à aucune solution x entière.
2° cas : $y = 2$, $y^2 + 1 = 5$ d'où : $3x^2 - 8 = 400$ et donc ne mène à aucune solution x entière.
3° cas : $y = 3$. $y^2 + 1 = 10$ d'où : $3x^2 - 8 = 200$ et donc ne mène à aucune solution x entière.
4° cas : $y = 7$, $y^2 + 1 = 50$ d'où : $3x^2 - 8 = 40$ d'où $x = 4$.
Seules les valeurs $x = 4$ et $y = 7$ sont solutions ; on en déduit que le produit xy est unique : $xy = 28$.

Autre solution : Georges Lion (Wallis).

Exercice 485-1 : Formule de grimoire ?

Dans le trapèze ci-contre, B, b, c et d désignent les longueurs des côtés. On note p son demi-périmètre et S son aire.

Montrer que $\mathrm{S} = \dfrac{B+b}{B-b}\sqrt{(p-B)(p-b)(p-b-c)(p-b-d)}$.



Solution de Franck Gautier (Pérignat-lès-Sarliève)

On peut calculer l'aire du trapèze avec la formule classique $\mathrm{S} = \dfrac{B+b}{2} \times h$.

On peut aussi la calculer à partir de la hauteur h en disant que c'est l'aire du rectangle plus l'aire du triangle obtenu avec les deux triangles qui sont à gauche et à droite. Ce qui donne : $\mathrm{S} = B \times h + \dfrac{B-b}{2} \times h$.

On tire de ces deux formules, les deux suivantes : $\dfrac{B+b}{2}=\dfrac{S}{h}$ et $\dfrac{B-b}{2}=\dfrac{S-Bh}{h}$,

et en faisant le rapport ; $S=\dfrac{B+b}{B-b}\times(S-Bh)$.

On reconnaît dans $S - Bh$ l'aire des triangles latéraux, c'est-à-dire l'aire d'un triangle de côtés $B - b$, c, d. On note p' le demi-périmètre de ce triangle. La formule de Héron permet d'écrire :

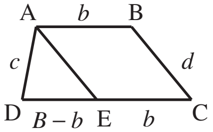
$$S-Bh=\sqrt{p'(p'-B+b)(p'-c)(p'-d)}.$$

En remarquant que $p' = p - b$, on obtient la formule du « grimoire » :

$$S=\frac{B+b}{B-b}\sqrt{(p-B)(p-b)(p-b-c)(p-b-d)}.$$

Remarque.

Pour le découpage, on peut tout aussi bien directement partager le trapèze par le triangle ADE et le parallélogramme ABCE (figure ci-contre) et retrouver la proportion $\dfrac{B+b}{B-b}$ comme suit :



L'aire du parallélogramme est double de celle du triangle ACE. Or les aires de ACE et de ADE, triangles de même hauteur, sont proportionnelles à leurs bases.

Ainsi $(\text{ABCE})=\dfrac{2b}{B-b}(\text{ADE})$ et

$$S=(\text{ABCD})=\left(1+\frac{2b}{B-b}\right)(\text{ADE})=\frac{B+b}{B-b}(\text{ADE}).$$

Autres solutions : Albert Marcout (Sainte Savine), Frédéric de Ligt (Montguyon), Pierre Lapôtre (Calais), Louis-Marie Bonneval (Poitiers), Jean Théocliste (Valence), Bernard Collignon (Coursan).

Nota.

– D'autres démonstrations utilisaient le triangle dont le trapèze est le « tronc ».

– Pierre Renfer fait remarquer que si $b = 0$, le trapèze dégénère en triangle et la formule coïncide avec celle de Héron et que, par ailleurs, la formule rappelle aussi celle de Brahmagupta pour l'aire S d'un quadrilatère inscriptible de côtés a, b, c, d :

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Le trapèze est un quadrilatère inscriptible si et seulement si $c = d$. Dans ce cas la formule du grimoire donne :

$$S=\frac{B+b}{B-b}\sqrt{(p-B)(p-b)}(p-b-c)=\frac{B+b}{2}\sqrt{(p-B)(p-b)}$$

et la formule de Brahmagupta donne :

$$S = (p-c)\sqrt{(p-B)(p-b)} = \frac{B+b}{2}\sqrt{(p-B)(p-b)}.$$

Exercice 485-2 (Georges Lion – Wallis)

Soit ABC un triangle d'aire S. Démontrer la relation : $AB^2 + AC^2 + BC^2 \geq 4S\sqrt{3}$.

Solution de Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques)

Soit I le milieu de [BC]. On sait que $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$.

Si on laisse B et C fixes et qu'on déplace A sur une parallèle à (BC), alors l'aire S reste invariante et $AB^2 + AC^2$ est minimal si AI est minimal, c'est-à-dire si A est sur la médiatrice de [BC].

On est donc ramené à démontrer l'inégalité pour les triangles isocèles en A.
Soit h la hauteur AI issue de A et a le côté BC.

L'inégalité à démontrer s'écrit alors : $\frac{3}{2}a^2 + 2h^2 \geq 2ah\sqrt{3}$.

Cette inégalité équivaut à $3a^2 + 4h^2 - 4ah\sqrt{3} \geq 0$.

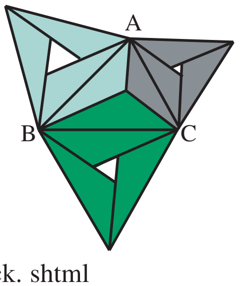
Elle est bien vérifiée puisque le premier membre est le carré de $2h - a\sqrt{3}$.

L'égalité a lieu si et seulement si $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, ce qui correspond aux triangles équilatéraux.

Autres Solutions : Jean-Claude Carréga (Lyon), Dominique Roux (Espaty), Albert Marcout (Sainte Savine), Frédéric de Ligt (Montguyon), Pierre Lapôtre (Calais), Louis Marie Bonneval (Poitiers), Franck Gautier (Pérignat-lès-Sarliève), Jean Théocliste (Valence), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Georges Lion (Wallis).

Nota.

Pour cet exercice posé aux olympiades mathématiques internationales de Budapest en 1961, les réponses ont non seulement été nombreuses, mais souvent multiples et différentes à plus d'un détail près. Un florilège vous est proposé en ligne sur le site de l'association : LIEN.



Une autre démonstration, basée sur la figure ci-contre est disponible sur l'excellent site cut-the-knot :
http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geomefry/Veitzenbock. shtml

Exercice 485-3 : Arithmétique

Démontrer le résultat suivant : Tout nombre entier qui est une puissance d'une somme de deux carrés est lui-même une somme de deux carrés.

Solution de Frédéric de Ligt (Montguyon)

On peut le montrer classiquement par récurrence en utilisant l'identité :

$$\left(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2\right)\left(x^2+y^2\right)=\left(\mathrm{X}x-\mathrm{Y}y\right)^2+\left(\mathrm{X}y+x\mathrm{Y}\right)^2.$$

Mais on peut aussi passer par les propriétés des modules des nombres complexes. Si $z = x + \mathrm{i}y$, on sait que $|z|^2 = x^2 + y^2$. Pour x, y entiers relatifs et n entier naturel on a donc

$$\left(x^2+y^2\right)^n=\left(|z|^2\right)^n=\left|z^n\right|^2=x_n^2+y_n^2 \quad \text{en posant } z^n=x_n+\mathrm{i}\,y_n$$

avec x_n et y_n eux-mêmes entiers relatifs puisque résultant de produits, de sommes et de différences des entiers relatifs x et y.

Autres solutions : Jean-Claude Carréga (Lyon), Albert Marcout (Sainte Savine), Louis Marie Bonneval (Poitiers), Bernard Collignon (Coursan), Pierre Lapôtre (Calais), Jean Gounon (Chardonnay), Odile Simon (La Prénessaye), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques).

Nota.
Odile Simon et Pierre Renfer font la remarque que, de façon plus générale, on sait que le produit de sommes de deux carrés est encore une somme de deux carrés ; et Pierre Renfer précise que le résultat classique le plus complet indique qu'un entier est somme de deux carrés si et seulement si les facteurs premiers congrus à 3 module 4 interviennent dans sa décomposition avec un exposant pair.

Remarque.
Pour les démonstrations utilisant la récurrence, on peut utiliser indifféremment l'une ou l'autre des deux identités suivantes :

$$\left(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2\right)\left(x^2+y^2\right)=\left(\mathrm{X}x+\mathrm{Y}y\right)^2+\left(\mathrm{X}y-x\mathrm{Y}\right)^2, \qquad (1)$$

$$\left(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2\right)\left(x^2+y^2\right)=\left(\mathrm{X}x-\mathrm{Y}y\right)^2+\left(\mathrm{X}y+x\mathrm{Y}\right)^2. \qquad (2)$$

De la première, on obtient successivement :

$$\left(x^2+y^2\right)^2=\left(x^2+y^2\right)^2+0^2\ ;\left(x^2+y^2\right)^3=\left(x^3+xy^2\right)^2+\left(x^2y+y^3\right)^2\ ;$$

$$\left(x^2+y^2\right)^4=\left(\left(x^2+y^2\right)^2\right)^2+0^2\ ;\text{ etc.}$$

De la seconde il vient :

$$\left(x^2+y^2\right)^2=\left(x^2-y^2\right)^2+\left(2xy\right)^2$$

bien connue des pythagoriciens ;

$$\left(x^2+y^2\right)^3=\left(x^3-3xy^2\right)^2+\left(3x^2y-y^3\right)^2\ ;$$

$$\left(x^2+y^2\right)^4=\left(x^4-6x^2y^2+y^4\right)^2+\left(4x^3y-4xy^3\right)^2\ ;\text{etc.}$$

qui sont les mêmes expressions que celles obtenues par l'utilisation des nombres complexes ; utilisation qui n'est pas sans rappeler celle de la formule de Moivre pour les formules trigonométriques.

Exercice 485-4 : Jean Théocliste – Valence (brevet supérieur Grenoble 1937)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}.$$

Écrire S_n sous forme condensée.

En déduire : a) $S_n < 2$

b) la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Solution de Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sum_{k=0}^{n} x^k=\frac{1}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{1-x}$, pour $x \neq 1$.

En dérivant les deux membres, on trouve :

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{(n+1)x^n}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

On en déduit que :

$$S_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^{k-1}}=\frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right)=2-\frac{n+1}{2^n}-\frac{2}{2^{n+1}}=2-\frac{n+2}{2^n}.$$

Donc $S_n < 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2$.

On peut interpréter ce résultat en termes probabilistes :

On lance indéfiniment une pièce régulière et X désigne le nombre de lancers nécessaires jusqu'à l'apparition du premier Pile.

La valeur 2 obtenue comme limite de S_n est l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Deux lancers sont en moyenne nécessaires pour faire apparaître Pile.

Solution de Frédéric de Ligt (Montguyon)

On note $A_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$. On a alors

$$\begin{aligned}
S_n &= A_n + \left(A_n - A_1\right) + \ldots + \left(A_n - A_{n-1}\right) \\
&= nA_n - \left(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}\right) \\
&= n\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \left(1 - \frac{1}{2^1}\right) - \ldots - \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\
&= 1 - \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^1} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{n}{2^n} + 1 - \frac{n}{2^{n-1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.
\end{aligned}$$

a) Il est alors clair que $S_n < 2$ puisque $(n + 2)/2^n$ est positif.

b) Si on ne connaît pas la fonction logarithme on peut par exemple prouver par récurrence que $2^n > n^2$ pour $n > 4$.

C'est évident pour $n = 5$. Si on suppose vraie l'inégalité au rang $n > 4$,on a

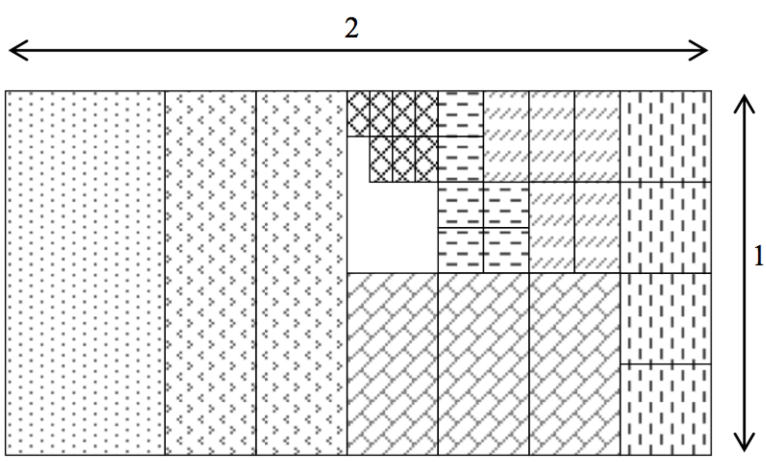
$$2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2n^2 > \left(n+1\right)^2.$$

Par conséquent $0 < \dfrac{n+2}{2^n} < \dfrac{4}{n+2}$ et, par application du théorème gendarme, on conclut que S_n tend vers 2 quand n tend vers $+\infty$.

Autres solutions : Jean-Claude Carréga (Lyon), Albert Marcout (Sainte Savine), Louis-Marie Bonneval (Poitiers), Bernard Collignon (Coursan), Pierre Lapôtre (Calais), Jean Gounon (Chardonnay), Odile Simon (La Prénessaye), Pierre Martin (Épinay sur Orge), Michel Sariwuy (Mende), Jean Théocliste (Valence).

Nota.

Michel Sarrouy propose également une splendide illustration géométrique en couleur, disponible sur le site LIEN et dont voici un aperçu en noir et blanc :



déjà représentés : $\frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{16} + 5 \times \frac{1}{32} + 6 \times \frac{1}{64} + 7 \times \frac{1}{128}$