Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART
13, rue des Garennes
63800 Cournon d'Auvergne
ou par courriel à
hochartmax@yahoo.fr

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 487-1 (Question de Srinivasa Ramanujan)

Pour $x \geq 1$, simplifier

$$f(x) = \sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + (x+2)\sqrt{1 + (x+3)\sqrt{1 + \cdots}}}}}$$

après avoir montré que cette expression avait un sens.

Problème 487-2 (Question de Michel Lafond)

On définit la suite u par $u_0 \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2\min(u_n, 1 - u_n)$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{\pi}\arccos\left(\cos\left(2^n \pi u_0\right)\right).$$

Problème 487-3 (Question de Michel Lafond)

On joue au jeu suivant. Il s'agit de trouver un nombre $\mathrm{N} \in [[1, 2, 3,..., 299]]$.
On ne peut poser que des questions du type « N est-il plus grand que x ? ».
La réponse ne peut être que « oui » ou « non ». On peut poser au plus 12 questions avant de proposer une réponse. Mais on n'a droit qu'à un maximum de 3 réponses « non ». C'est-à-dire que si on a pour la troisième fois une réponse « non », on est obligé de proposer une réponse au coup suivant puis le jeu est terminé. Il est possible de gagner à coup sûr, mais la stratégie est unique ! En particulier quelle doit être la première question ?

Solutions des problèmes antérieurs

François Couchot (Caen) m'envoie les solutions des problèmes 480-2, 480-3 et 481-1. Ces solutions, toutes justes, sont, pour l'essentiel, proches des solutions publiées dans les bulletins 485 et 486.

Problème 482-2

Pour x, y, $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(x-kz)^{k-1}(y+kz)^{n-k}.$$

Commentaires. Le problème consistait en réalité à prouver l'identité suivante : pour $x,\ y,\ z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x(x-kz)^{k-1}(y+kz)^{n-k}. \tag{1}$$

Dans cette somme, il est sous-entendu que le terme obtenu pour $k = 0$ vaut y^n, même si $x = 0$. Cette identité, que j'ai trouvée dans « Le Dictionnaire des Mathématiques » d'Alain Bouvier, Michel George et François Le Lionnais, est due à Abel (1826) et est valable dans tout anneau commutatif. Une fois l'identité d'Abel établie sur $\mathbb{C}$, on a immédiatement la réponse au problème posé. Lorsque x est non nul,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(x-kz)^{k-1}(y+kz)^{n-k} = \frac{(x+y)^n - y^n}{x} = \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}x^{k-1}y^{n-k}.$$

Cette dernière égalité est valable pour $x = 0$ et donne

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-kz)^{k-1}(y+kz)^{n-k} = ny^{n-1}.$$

Dans les deux premières solutions ci-dessous, on se contente donc d'établir la relation (1).

Solution de Philippe Picard (Lyon). Cette élégante solution utilise les polynômes d'Abel(1). Soit $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique complexe de raison $b \in \mathbb{C}$. Le polynôme d'Abel de degré $n \in \mathbb{N}$ relatif à la suite u est défini par

$$\mathrm{A}_n(x\,|\,u) = \frac{(x-u_0)(x-u_n)^{n-1}}{n!},$$

avec la convention $\mathrm{A}_0(x\,|\,u) = 1$. Puisque $u_0 = u_n - nb$,

$$\mathrm{A}_n(x\,|\,u) = \frac{(x-u_n)^n}{n!} + b\frac{(x-u_n)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n \geq 1). \tag{2}$$

En notant $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker valant 1 si $i = j$ et 0 sinon,

$$\mathrm{A}_n(u_0\,|\,u) = \delta_{n,0}. \tag{3}$$

On introduit l'opérateur « shift » , noté E, défini sur $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par

(1) Ma bibliothèque et le net étant peu loquaces au sujet de ces polynômes, je remercie par avance Philippe Picard (ou tout autre lecteur) s'il peut me communiquer une bibliographie sur ce thème. Franck Gautier me signale toutefois le livre de Steven Roman, intitulé « The umbral calculus », publié chez Academic Press.

$$\mathrm{E}u = \left(u_{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

La relation (2) donne en dérivant

$$\mathrm{A}'_n\left(x \mid u\right) = \mathrm{A}_{n-1}\left(x \mid \mathrm{E}u\right) \quad \left(n \geq 1\right). \tag{4}$$

Pour $r \in \mathbb{N}$, la dérivée r-ième est donc

$$\mathrm{A}_n^{(r)}\left(x \mid u\right) = \mathrm{A}_{n-r}\left(x \mid \mathrm{E}^r u\right) \quad \left(n \geq r\right), \tag{5}$$

E^r désignant la r-ième itérée de E. D'après (3) et (5),

$$\mathrm{A}_n^{(r)}\left(u_r \mid u\right) = \delta_{n-r,0} = \delta_{n,r} \quad \left(n \geq r \geq 0\right). \tag{6}$$

On en vient au problème. Les polynômes $\mathrm{A}_n\left(x \mid u\right)$ sont échelonnés en degré. Un polynôme B(x) de degré $n \in \mathbb{N}$ s'écrit donc

$$\mathrm{B}\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{A}_k\left(x \mid u\right).$$

L'égalité (6) montre que, pour $r \in [[0,n]]$,

$$\mathrm{B}^{(r)}\left(u_r\right) = \sum_{k=r}^{n} \alpha_k \mathrm{A}_k^{(r)}\left(u_r \mid u\right) = \sum_{k=r}^{n} \alpha_k \delta_{k,r} = \alpha_r.$$

Ainsi,

$$\mathrm{B}\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{B}^{(k)}\left(u_k\right) \mathrm{A}_k\left(x \mid u\right). \tag{7}$$

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, y, $z \in \mathbb{C}$ et on choisit

$$\mathrm{B}\left(x\right) = \left(x + y\right)^n, \quad u_0 = 0, \quad b = z.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, $u_k = kz$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{A}_k\left(x \mid u\right) = x\frac{\left(x - kz\right)^{k-1}}{k!}.$$

Enfin, pour $k \in [[0,n]]$

$$\mathrm{B}^{(k)}\left(u_k\right) = \frac{n!}{\left(n-k\right)!}\left(y + kz\right)^{n-k}.$$

La relation (7) donne, en isolant le terme d'indice $k = 0$ pour lequel $\mathrm{A}_k = 1$,

$$\left(x + y\right)^n = x\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(x - kz\right)^{k-1} \left(y + kz\right)^{n-k} + y^n,$$

ce qui est l'identité d'Abel.

Solution de Frédéric de Ligt (Montguyon). Pour démontrer l'identité d'Abel dans $\mathbb{C}$, on procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Le cas $n = 1$ étant clair. on suppose (1) établie à un certain rang $n \geq 1$. En multipliant par $(n + 1)$ et en intégrant par rapport à y, il vient

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (n+1)\binom{n}{k} x(x-kz)^{k-1} \frac{(y+kz)^{n-k+1}}{n-k+1} + \mathrm{C}(x,z),$$

où $\mathrm{C}(x,z)$ est un polynôme en x et z. La relation

$$(n+1)\binom{n}{k} = (n+1-k)\binom{n+1}{k} \tag{8}$$

donne

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} x(x-kz)^{k-1} (y+kz)^{n-k+1} + \mathrm{C}(x,z). \tag{9}$$

Il reste à montrer que $\mathrm{C}(x,z)$ est le « terme manquant » dans l'identité d'Abel au rang $n + 1$, à savoir

$$\mathrm{C}(x,z) = x(x-(n+1)z)^{n}.$$

En testant (9) en $y = -(n + 1)z$, on trouve

$$\mathrm{C}(x,z) = (x-(n+1)z)^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} x(x-kz)^{k-1} ((k-n-1)z)^{n-k+1}. \tag{10}$$

Par ailleurs, l'identité d'Abel – que l'on a supposé établie au rang n – testée en $y = -(n + 1)z$ donne

$$(x-(n+1)z)^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x(x-kz)^{k-1} ((k-n-1)z)^{n-k}.$$

En multipliant par $(n + 1)z$, on obtient

$$(n+1)z(x-(n+1)z)^{n} = \sum_{k=0}^{n} (n+1)\binom{n}{k} x(x-kz)^{k-1} \frac{((k-n-1)z)^{n+1-k}}{k-n-1},$$

soit, encore avec la relation (8),

$$(n+1)z(x-(n+1)z)^{n} = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} x(x-kz)^{k-1} ((k-n-1)z)^{n+1-k}.$$

Injectée dans (9), cette dernière égalité donne

$$\mathrm{C}(x,z) = (x-(n+1)z)^{n+1} + (n+1)z(x-(n+1)z)^{n} = x(x-(n+1)z)^{n},$$

ce qui clôt la démonstration.

Solution de Marie-Laure Chailloux (Épinay sur Orge). Cette solution calcule directement la somme demandée, à savoir

$$\mathrm{P}_n(x,y,z)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(x-kz)^{k-1}(y+kz)^{n-k}\quad\left(x,y,z\in\mathbb{C},n\in\mathbb{N}^*\right),$$

que l'on développe par deux formules du binôme en

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=0}^{k-1}\sum_{p=0}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k-1}{m}\binom{n-k}{p}(-1)^{k-1-m}\,x^m y^p k^{n-1-m-p}z^{n-1-m-p}.$$

Dans cette somme, on pose

$$q=n-1-m-p\quad\text{et}\quad i=k-1-m.\tag{11}$$

L'égalité $q=0$ équivaut à $n-1=m+p$ soit à $(m,p)=(k-1,n-k)$ puisque l'indice (m,p) parcourt $[[0,k-1]]\times[[0,n-k]]$. Par les changements d'indices (11), on effectue la transformation suivante : pour $k\geq 1$,

$$\binom{n}{k}\binom{k-1}{m}\binom{n-k}{p}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{(k-1)!}{m!i!}\,\frac{(n-k)!}{p!(q-i)!}\,\frac{n}{k}\binom{n-1}{q}\binom{m+p}{m}\binom{q}{i}.$$

En isolant le cas où $q=0$,

$$\mathrm{P}_n(x,y,z)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{k-1}y^{n-k}+\mathrm{Q}_n(x,y,z),$$

où $\mathrm{Q}_n(x,y,z)$ désigne la somme

$$\sum_{\substack{m+p+q=n-1\\ q\geq 1}} n\binom{n-1}{q}\binom{m+p}{m}\left(\sum_{i=0}^{q}\binom{q}{i}(-1)^i(m+1-i)^{q-1}\right)x^m y^p z^q.$$

Il reste à établir la nullité des sommes

$$\sum_{i=0}^{q}\binom{q}{i}(-1)^i(m+1+i)^{q-1}\quad\left(m,q\in\mathbb{N}\right)\tag{12}$$

pour conclure que

$$\mathrm{P}_n(x,y,z)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{k-1}y^{n-k}$$

qui est bien égal pour $x\neq 0$ à

$$\frac{(x+y)^n-y^n}{x}.$$

Pour établir la nullité des sommes (12), Marie-Laure Chaillout introduit les expressions

$$\mathrm{S}_{m,q,j}=\sum_{i=0}^{q}\binom{q}{i}(-1)^i(m+1+i)^j\quad\left(m,q,j\in\mathbb{N}\right)\tag{13}$$

On fixe $q \geq 1$ et on montre par récurrence (finie) sur $j \in [[0,q-1]]$ que $S_{m,q,j}$ est nulle pour tout $m \in \mathbb{N}$, le cas $j = q-1$ donnant la nullité des sommes (12). L'initialisation à $j = 0$ résulte de la formule du binôme :

$$S_{m,q,0} = (1-1)^q = 0.$$

Ensuite si toutes les sommes $S_{m,q,j-1}$ sont nulles pour un certain $j \in [[1,q-1]]$, en écrivant

$$(m+1+i)^j = (m+1)(m+1+i)^{j-1} + i(m+1+i)^{j-1},$$

on établit la relation

$$S_{m,q,j} = -qS_{m+1,q-1,j-1} + (m+1)S_{m,q,j-1}$$

et l'on conclut par récurrence.

Michel Lafond (Dijon) propose une approche un peu différente. Le cas $z = 0$ se résumant à la formule du binôme, il suppose $z \neq 0$ et se ramène au cas $z = 1$. Il s'agit ensuite de trouver les coefficients devant $x^k y^{n-k}$, ce qui le conduit à s'intéresser à des sommes du type (13).

Commentaire. La nullité des sommes (13) revient essentiellement à établir pour tout $P \in \mathbb{C}_{q-1}[X]$,

$$\sum_{i=0}^{q} (-1)^i \binom{q}{i} P(i) = 0,$$

L'opérateur $\tau : P(X) \mapsto P(X+1)$ préservant le degré et le coefficient dominant,

$$\deg\big(\tau(P) - P\big) \leq \deg(P) - 1.$$

Donc

$$(\tau - \mathrm{id})^q (P) = 0,$$

soit encore

$$\sum_{i=0}^{q} \binom{q}{i} (-1)^{q-i} \tau^i (P) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=0}^{q} \binom{q}{i} (-1)^{q-i} P(X+i) = 0.$$

On obtient le résultat souhaité en testant en 0.

Problème 484-4 ; extrait du Concours Général 2008-2009

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ solutions de l'équation fonctionnelle

$$f(2x) = 2f(x)^2 - 1,$$

telles que $\dfrac{1-f(x)}{x^2}$ admette une limite quand x tend vers 0 et vérifiant $f(0) = 1$.

Solution. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \lambda x^2 + \mathrm{o}(x^2), \tag{14}$$

à savoir

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-f(x)}{x^2}\right).$$

Ce réel λ est positif (f est à valeurs dans $[-1,1]$). L'existence de ce développement limité montre que f est continue en 0 puisque $f(x) \underset{x\to 0}{\to} 1 = f(0)$.

Fixons $x \in \mathbb{R}$. On peut définir, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\theta_n = \arccos\left(f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) \in [0,\pi].$$

Par continuité de f en 0, et puisque $f(0) = 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \theta_n = \arccos(f(0)) = 0.$$

Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$,

$$0 \leq \theta_n \leq \frac{\pi}{2}.$$

De plus, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\cos(\theta_n) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 2f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)^2 - 1 = 2\cos^2(\theta_{n+1}) - 1 = \cos(2\theta_{n+1}).$$

Pour $n \geq n_0$, les réels θ_n et $2\theta_{n+1}$ sont dans $[0,\pi]$, donc $\theta_n = 2\theta_{n+1}$ puis

$$\theta_n = \frac{\theta_{n_0}}{2^{n-n_0}} \quad (n \geq n_0). \tag{15}$$

Par ailleurs,

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \lambda\left(\frac{x}{2^n}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{4^n}\right),$$

mais on a aussi, d'après (15),

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \cos\left(\theta_n\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2}\theta_n^2 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{4^n}\right).$$

Ainsi

$$-\lambda\left(\frac{x}{2^n}\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\theta_n^2.$$

La relation (15) donne alors

$$\lambda x^2 = \frac{1}{2}\theta_{n_0}^2\, 4^{n_0}.$$

Posons $a = \sqrt{2\lambda}$. Notons que a est indépendant de x. Par définition,

$$\theta_{n_0} = \pm a \frac{x}{2^{n_0}}$$

et

$$f\left(\frac{x}{2^{n_0}}\right) = \cos\left(\theta_{n_0}\right) = \cos\left(a\frac{x}{2^{n_0}}\right).$$

L'équation fonctionnelle $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$ et la trigonométrie classique donne alors

$$f\left(\frac{x}{2^{n_0-1}}\right) = \cos\left(a\frac{x}{2^{n_0-1}}\right),$$

puis par récurrence finie sur $k \in [\![0, n_0]\!]$,

$$f\left(\frac{x}{2^{n_0-k}}\right) = \cos\left(a\frac{x}{2^{n_0-k}}\right).$$

En prenant $k = n_0$, on obtient

$$f(x) = \cos(ax).$$

Réciproquement, pour tout $a \in \mathbb{R}$, les fonctions $x \mapsto \cos(ax)$ sont solutions au problème posé.