Exercices de-ci, de-là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigué. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

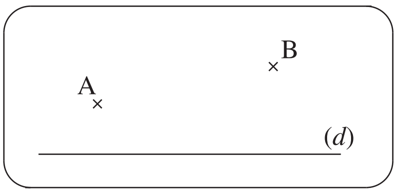
Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par Mél à :
bruno.alaplantive@free.fr
ou par courrier à :
Jean Fromentin, 17 rue de la Roussille, 79000 NIORT

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 486-1 : Un classique sous contrainte

Construire le point M de (d) qui minimise MA + MB, sans sortir du cadre.

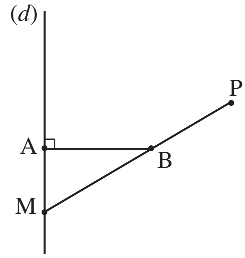


Exercice 486-2 : B. Lefebvre - Namur

Démontrer le critère de divisibilité par 7 suivant.
Le reste de la division d'un nombre entier par 7 s'obtient par cette méthode peu connue : on multiplie le premier chiffre de gauche par 3, puis on ajoute le chiffre suivant ; on multiplie le résultat par 3, puis on ajoute le chiffre suivant ; et ainsi de suite.
Le calcul se simplifie, si l'on prépare le nombre proposé en retranchant 7 à chacun de ses chiffres supérieurs ou égaux à 7 et si, dans le cours de l'opération, on retranche à chaque résultat avant de le multiplier par 3 le nombre 7 ou tout multiple de 7, s'il s'en trouve.
Par exemple, soit N = 196 874, ou 126 104.
$1 \times 3 + 2 = 5$; $5 \times 3 + 6 = 21$, ou 0 ; $0 \times 3 + 1 = 1$; $1 \times 3 + 0 = 3$; $3 \times 3 + 4 = 13$ ou 6 ; R = 6.

Exercice 486 - 3 : M. Guisnée - Paris

Soient un segment [AB] et (d) sa perpendiculaire en A. On choisit un point M pris sur (d) et on construit le point P de la demi-droite [MB), qui n'appartient pas au segment [MB] qui vérifie : PB × BM = AB².



Déterminer le lieu de P lorsque M varie sur (d).

(Donner, si possible, une solution par géométrie analytique et une solution « purement » géométrique).

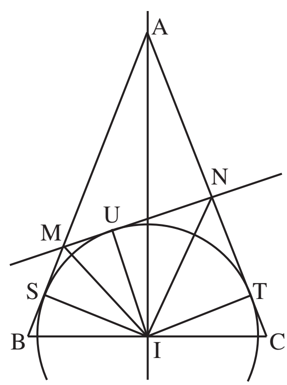
Solutions

Exercice 484-1 (Georges Lion – Wallis)

A, B et C sont trois points non alignés tels que AB = AC. I est le milieu de [BC] et C le cercle de centre I tangent à (AB) et (AC).
M ∈ [AB] et N ∈ [AB] sont tels que (MN) est tangente à C.
Démontrer la relation :

$$\mathrm{BM} \times \mathrm{CN} = \frac{\mathrm{BC}^2}{4}.$$

Solution de Raymond Raynaud (Digne)



Soit S, T et U les points de contact du cercle et des droites AB, AC et MN.
M et N appartiennent respectivement à [AS] et [AT].

Posons $\alpha = \widehat{\mathrm{IAB}}$ et notons que $\widehat{\mathrm{MIN}} = \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{SIT}} = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Pour démontrer l'égalité demandée il suffit de prouver que les deux triangles BMI et CIN sont semblables.
En effet il en résultera que

$$\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BI}} = \frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{CN}}, \quad \mathrm{BM} \times \mathrm{CN} = \mathrm{BI} \times \mathrm{CI} = \frac{\mathrm{BC}^2}{4}.$$

Quant à la similitude des deux triangles, elle résultera de l'égalité $\widehat{\mathrm{BMI}} = \widehat{\mathrm{CIN}}$, à établir :

$$\widehat{\mathrm{BMI}} = \frac{\pi}{2} - \widehat{\mathrm{MIS}} = \frac{\pi}{2} - \widehat{\mathrm{MIU}},$$

$$\widehat{\mathrm{CIN}} = \alpha + \widehat{\mathrm{NIT}} = \alpha + \widehat{\mathrm{NIU}},$$

$$\widehat{\mathrm{BMI}} - \widehat{\mathrm{CIN}} = \frac{\pi}{2} - \alpha - \widehat{\mathrm{MIN}} = 0.$$

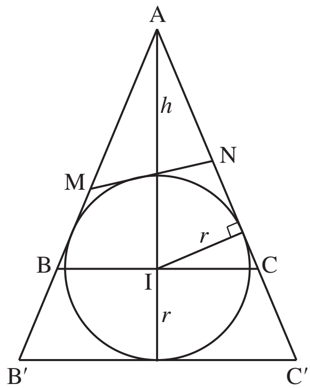
CQFD.

Solution de Miguel Amengual Covas (Mallorca)

Sea B′ un punto de AB y C′ un punto de AC tales que B′C′ ∥ BC y $\mathcal{C}$ es la circunferencia inscrita en ΔAB′C′.
Pues MN es tangente a $\mathcal{C}$, tenemos

$$\frac{\mathrm{AB'}+\mathrm{B'C'}+\mathrm{C'A}}{2}\cdot \mathrm{AM}\cdot\mathrm{AN} \\ = \mathrm{AB'}\cdot\mathrm{AC'}\cdot(\mathrm{AM}+\mathrm{AN})-\mathrm{AB'}\cdot\mathrm{AC'}\cdot\frac{\mathrm{AB'}-\mathrm{B'C'}+\mathrm{C'A}}{2} \qquad (1)$$

(esta relación homográfica y simétrica se puede encontrar en este BULLETIN, núm. 375, setiembre 1990, p. 522-523).



Sea $l=\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$, $h=\overline{\mathrm{AI}}$ y representemos por r el radio de $\mathcal{C}$.
La rázon de semejanza de los triángulos AB′C′ y ABC es :

$$\frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{BC}}=\frac{h+r}{r}=1+\frac{\mathrm{IC}}{\mathrm{AC}}=1+\frac{\frac{\mathrm{BC}}{2}}{\mathrm{AC}}=\frac{2\mathrm{AC}+\mathrm{BC}}{2\mathrm{AC}}=\frac{p}{l}$$

en donde p es el semiperímetro del triángulo ABC.
Por consiguiente, de (1) se sigue que

$$\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}}{2}\cdot\frac{p}{l}\cdot(\mathrm{AB}-\mathrm{BM})\cdot(\mathrm{AC}-\mathrm{CN})=\left(\mathrm{AB}\cdot\frac{p}{l}\right)\cdot\left(\mathrm{AC}\cdot\frac{p}{l}\right) \\ \cdot\big((\mathrm{AB}-\mathrm{BM})+(\mathrm{AC}-\mathrm{CN})\big)-\left(\mathrm{AB}\cdot\frac{p}{l}\right)\cdot\left(\mathrm{AC}\cdot\frac{p}{l}\right)\cdot\frac{\mathrm{AB}-\mathrm{BC}+\mathrm{CA}}{2}\cdot\frac{p}{l}$$

esto es,

$$p\cdot\frac{p}{l}\cdot(l-\mathrm{BM})\cdot(l-\mathrm{CN}) \\ =\left(l\cdot\frac{p}{l}\right)\cdot\left(l\cdot\frac{p}{l}\right)\cdot\big[(l-\mathrm{BM})+(l-\mathrm{CN})\big]-\left(l\cdot\frac{p}{l}\right)\cdot\left(l\cdot\frac{p}{l}\right)\cdot\frac{l-\mathrm{BC}+l}{2}\cdot\frac{p}{l}$$

que simplificada es

$$(l-\mathrm{BM})\cdot(l-\mathrm{CN})=l\cdot(2l-\mathrm{BM}-\mathrm{CN})-p\cdot(p-\mathrm{BC})$$

o, equivalentemente,

$$l^2-\mathrm{BM}\cdot\mathrm{CN}=2l^2-\frac{2l+\mathrm{BC}}{2}\cdot\frac{2l-\mathrm{BC}}{2}$$

de donde resulta

$$BM \cdot CN = \frac{BC^2}{4}$$

y hemos terminado.

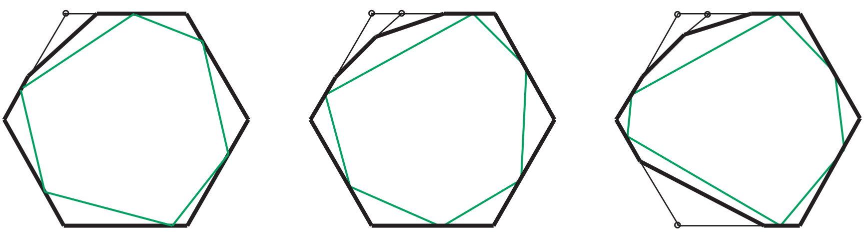
Nota. La rázon de semejanza se traduit par : rapport de similitude.
Merci à notre collègue espagnol pour sa solution et son assiduité à la lecture du Bulletin !

Autres solutions : Albert Marcout (Sainte Savine), Bernard Collignon (Coursan), Georges Lion (Wallis).

Exercice 484 - 2 : Daniel Reisz - Auxerre (D'après un exercice proposé à l'olympiade suisse de 2005)
Tailler un polygone convexe, c'est lui couper un coin, un sommet. De façon plus précise et plus mathématique, tailler un polygone convexe de n côtés consiste à choisir deux côtés consécutifs AB et BC et à les remplacer par les cotés AM, MN et NC où M et N sont deux points pris respectivement sur les côtés ouverts]AB[et]BC[. On obtient ainsi un polygone convexe de $(n + 1)$ côtés d'aire plus petite que celle du polygone initial.
Soit P(6) un hexagone régulier d'aire 1. On le taille arbitrairement et on obtient ainsi successivement des polygones convexes P(7), P(8), P(9), … Montrer que l'aire de P(n) restera toujours supérieure à 1/2.

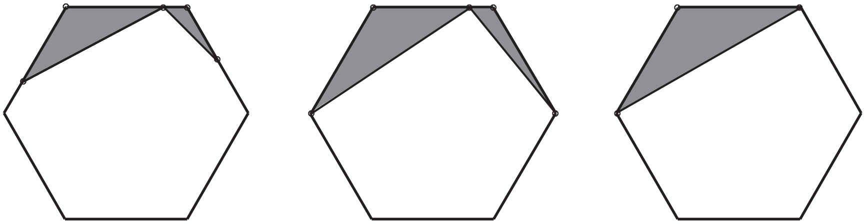
Solution de Bruno Alaplantive (Calgary)

Le procédé est tel qu'aucun des côtés de l'hexagone initial ne peut complètement disparaître (*les points sont pris sur les côtés ouverts*).
Ainsi, six des côtés du polygone P(n) sont portés par chacun des six côtés de l'hexagone initial.
On peut donc inscrire dans ce polygone un hexagone dont chacun des sommets est pris sur un des côtés de l'hexagone de départ, comme le montrent les figures ci-dessous :

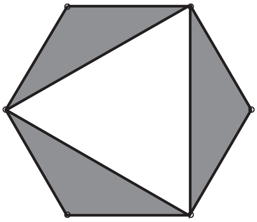


Il s'agit donc de prouver qu'en prenant six points au hasard sur les côtés d'un hexagone régulier d'aire égale à 1, l'hexagone obtenu a une aire supérieure ou égale à 1/2.

Deux triangles ayant des bases portées par le même côté sont plus petits qu'un sixième de l'hexagone :



Les six triangles sont donc plus petits que la moitié :



et l'hexagone complémentaire plus grand que la moitié.

Autres Solutions : Michel Lafond (Dijon), Daniel Reisz (Auxerre).

Exercice 4S4 - 4 : Question du concours australien de mathématiques 2008 (transmis par Georges Lion)

Quelle est la plus petite valeur que peut prendre

$$\sqrt{49+a^2-7a\sqrt{2}}+\sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{2}}+\sqrt{50+b^2-10b}$$

pour a et b nombres réels positifs ?

Solution : Georges Lion (Wallis)

Un point O étant donné, on construit les points M, N, P et Q tels que :

$\widehat{\text{MON}}=\widehat{\text{NOP}}=\widehat{\text{POQ}}=45°$ et OM = 7 ; ON = a ; OP = b ; OQ = $5\sqrt{2}$.

D'après Al-Kashi l'expression à étudier vaut MN + NP + PQ dont la plus petite valeur est

$$\text{MQ}=\sqrt{49+50+35\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=13.$$

Autre solution : Bernard Collignon (Coursan).

Nota. Le concours australien de mathématiques existe depuis 1977 (*c'est lui qui a servi de modèle au concours Kangourou*). Les candidats disposent d'une heure et quart pour répondre aux 25 questions d'un QCM, suivies de 5 questions ouvertes. L'exercice proposé était l'une d'elles. Il était précisé que la réponse était un nombre entier inférieur à 1000.

La solution que propose Georges Lion est à tout le moins percutante ! L'étincelle qu'il faut avoir pour pouvoir répondre dans le temps imparti …