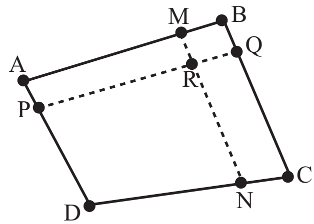
Le paraboloïde hyperbolique d'équation $z = xy$

Jacques Lucet

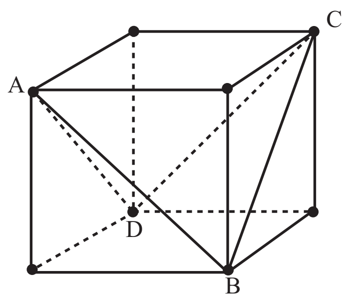
Préambule : Soit les points distincts A, B, C et D de l'espace $\mathbb{R}^3$. Soit aussi les réels λ et μ non nuls et différents de 1. Posons M = (A(λ),B($1-\lambda$)), c'est-à-dire que le point M est le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients λ et $1-\lambda$. Posons encore :
N = (C($1-\lambda$),D(λ)), P = (A(μ),D($1-\mu$)), Q = (B(μ),C($1-\mu$)), R = (M(μ),N($1-\mu$)).



Montrer que l'on a : R = (P(λ),Q($1-\lambda$)) en utilisant le théorème d'associativité et en déduire que les droites (MN) et (PQ) sont concourantes.

1. Condition nécessaire et suffisante pour qu'un point appartienne à la surface S

Soit les points A(1,1,1), B(–1,1,-1), C(–1,–1,1) et D(1,–1,–1) dans un repère orthonormé (O,x,y,z) : ce sont quatre sommets d'un cube comme représenté ci-après.



- Vérifier que les points A, B, C et D appartiennent à la surface S d'équation $z = xy$.
- Vérifier également que les points M, N, P et Q définis dans le préambule appartiennent aussi à la surface S quels que soient les réels λ et μ.
- En déduire que les quatre droites (AB), (AD), (CD) et (CB) sont tout entières contenues dans la surface S.
- Prouver enfin que le point R appartient à la surface S ; que dire des droites (MN) et (PQ) ?
- Réciproquement, montrer que tout point R de la surface S se trouve sur deux droites (MN) et (PQ) s'appuyant sur les côtés du quadrilatère ABCD et entièrement contenues dans la surface S.

La surface S est donc l'ensemble des points R, intersection chacun de deux droites (MN) et (PQ) telles que décrites précédemment. On dit que la surface S est engendrée par de telles droites. L'utilitaire Excel va nous permettre d'en visualiser quelques unes formant un maillage.

(*) Lycée Jean-Baptiste de la Salle à Saint-Denis (93). jacques.lucet@laposte.net

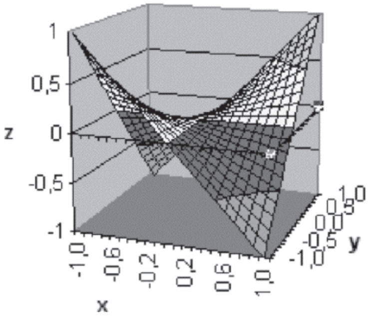
2. Représentation d'une portion de la surface S

Sous Excel, indiquer en première ligne à partir de la cellule B1, puis en première colonne à partir de la cellule A2, les réels de -1 à 1 avec un pas de 0,1.

B2 = =PRODUIT($A2;B$1)

	A	B	C	D	E
1		-1	-0,9	-0,8	-0,7
2	-1	1	0,9	0,8	0,7
3	-0,9	0,9	0,81	0,72	0,63
4	-0,8	0,8	0,72	0,64	0,56
5	-0,7	0,7	0,63	0,56	0,49
6	-0,6	0,6	0,54	0,48	0,42

- Dans la cellule B2, recopier la formule indiquée établissant le produit des cellules A2 et B1 et étendre cette formule avec la souris jusqu'à V2, puis V22.
- Cliquer sur l'icône de l'assistant graphique et choisir « Surface » de manière à obtenir le dessin ci-dessous



- Faire tourner la surface en cliquant sur l'un des sommets du cube et en laissant enfoncé le bouton gauche de la souris.

3. Intersection de la surface S avec des plans particuliers

- Si l'on pose $z = f(x,y) = xy$, comparer $f(x,y)$ et $f(-x,-y)$ et en déduire une propriété géométrique de la surface S.
- Quelle est l'intersection de la surface S avec le plan (xOy) ? Montrer que l'intersection de la surface S avec un plan parallèle au plan (xOy) et différent du plan (xOy) est une **hyperbole**.
- Montrer que l'intersection de la surface S avec un plan parallèle au plan (zOy) ou au plan (zOx) est une droite.
- Montrer enfin que l'intersection de la surface S avec le plan d'équation $x - y = 0$ est une **parabole**.

On dit que la surface S est un **paraboloïde hyperbolique**.