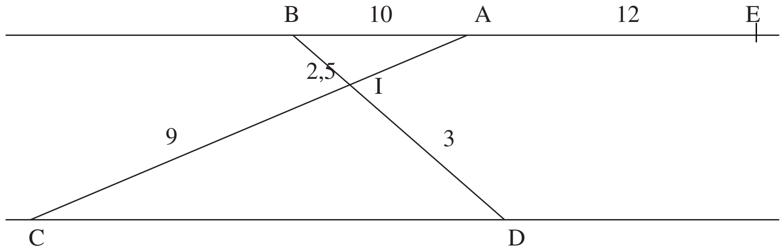
5. Construire c'est … anticiper.

Petite anecdote : juin 1995, académie de Lyon, brevet des collèges, épreuve de Mathématiques.
Les élèves composèrent ce jour-là sur l'exercice suivant :

La figure ci-dessous n'est pas en vraie grandeur. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



1) Calculer IA et CD.

Le calcul (bien gentiment mené grâce au théorème de Thalès) menait à IA = 7,5 et CD = 12.
Lors de l'épreuve, très rapidement, l'information d'une « coquille » dans l'énoncé fut diffusée dans les centres d'examens… La rumeur dit qu'un jeune candidat non-voyant s'exclama, à l'annonce de 12 pour CD : « Le triangle n'est pas constructible » (sous entendu aplati).
Combien d'élèves ce jour-là s'en aperçurent ?

EVAPM 2008 : Construire c'est bien anticiper !
L'étude 2008 profita des divers supports des épreuves pour tester différentes attitudes chez les élèves :

- En gestion mentale :
  - associer, sans pouvoir mesurer, des angles à leur mesure,
  - évaluer mentalement la faisabilité de la construction d'une figure, en s'appuyant sur des propriétés connues (somme des angles d'un triangle, inégalité triangulaire).
- En épreuve écrite :
  - reporter des longueurs en utilisant un compas,
  - reproduire une figure codée et, donc, auparavant décoder et déterminer l'ordre de construction de chaque figure élémentaire,
  - construire en utilisant des propriétés, comme celles de la symétrie centrale.

I. En gestion mentale

Trois questions sur ce thème étaient proposées via les questionnaires oraux et visuels :

– En Cinquième :

Peut-on construire un triangle dont les côtés mesurent 4 cm, 13 cm et 8 cm ?

R.E. item 1 : *58 %*

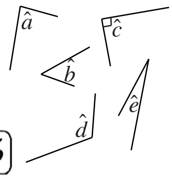
Peut-on construire un triangle dont deux angles mesurent 120° et 60° ?

R.E. item 1 : *56 %*

– En sixième et cinquième :

Voici les mesures des cinq angles représentés ci-contre : 85°, 90°, 18°, 50°, 115°.

Complète les égalités de la feuille.



R.E. item 1 : 62 %|*71 %*

Quelques commentaires à propos des scores et démarches des élèves :

a) l’inégalité triangulaire

Le temps et la nature de l’épreuve pour la première de ces trois questions ne permet pas de faire une construction. L’élève peut, soit s’imaginer la construction pas à pas (le plus souvent en imaginant le tracé horizontal du côté le plus long puis les deux arcs de cercle qui viennent se couper sur le troisième sommet), soit faire appel à la connaissance d’une relation entre les longueurs des côtés d’un triangle. Une bonne moitié des élèves répond correctement que la construction n’est pas possible ; pour les autres, la donnée de 3 segments de longueurs quelconques semble synonyme de triangle.

b) somme des angles d’un triangle

On peut penser que la plupart des élèves de cinquième savent dire que la somme des angles d’un triangle est 180° et utiliser cette propriété pour déterminer le troisième angle. Mais ici, aucune mesure d’angle n’est demandée : l’une des démarches peut consister en « je calcule la mesure du troisième angle », puis conclure que le troisième angle mesurant 0°, la construction est impossible. C’est déjà un beau raisonnement, qui demande un certain temps, l’avaient-ils ? Une autre démarche, plutôt issue du travail sur les angles alternes-internes et une construction pas à pas devrait permettre à l’élève d’imaginer ces angles de 60° et 120° et de « voir » que leurs côtés non communs sont parallèles…
Quoiqu’il en soit, seulement la moitié des élèves répondent que la construction est impossible. Reste à savoir si cette réponse fait suite à un raisonnement correct ou a été soufflée par un théorème en acte : 120° c‘est trop grand … (habitués aux triangles avec angles aigus).

c) estimer la mesure d’un angle sans pouvoir mesurer

L’angle droit est repéré depuis l’école élémentaire, et sa mesure, 90°, lui est associée.

Pour répondre à la troisième question, savoir qu'un angle droit mesure 90°, ce qui est le cas de 73 % des sixièmes et 86 % des cinquièmes, et qu'un angle obtus mesure plus de 90° (vrai pour 67 % en Sixième et 77 % en Cinquième) aide grandement ! Pour les autres angles, il reste à ordonner les angles et leurs mesures.
L'élève peut aussi les classer du plus petit au plus grand et associer les mesures dans le même ordre.

La plus grande fréquence d'erreur sur l'angle $\hat{a}$ provient très certainement de sa proximité avec un angle droit d'autant plus que la question est projetée au tableau sans commentaire et pendant 30 secondes.
Sur cette question, la moitié des élèves de Sixième donnent toutes les bonnes réponses et 55 % des élèves de Cinquième également.

Du côté des épreuves écrites

a) reporter une longueur

Nous avons posé aux élèves de Sixième la question suivante :

L'un des points N, P, Q, R a été construit de façon que sa distance au point M soit égale au périmètre du triangle ABC.

Vrai ou Faux ?				
a	Le point R est tel que MR = AB + BC + CA	V	F	Jnsp
b	Le point P est tel que MR = AB + BC + CA	V	F	Jnsp
c	Le point N est tel que MR = AB + BC + CA	V	F	Jnsp
d	Le point Q est tel que MR = AB + BC + CA	V	F	Jnsp

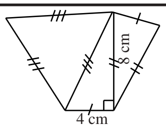
R.E. : 40 %

Seulement la moitié d'entre eux ont coché la bonne réponse, le point N. Peut-être le manque de précision dans les reports ou mesures a-t-il pu faire hésiter certains entre deux points ? Ce qui est surprenant par contre, c'est que 13 % donnent au moins deux points : il n'y a pas unicité du point alors que la longueur comme le point origine sont fixés. Les scores sont légèrement inférieurs à ceux de 2005.

b) reproduction d'une figure.
Question épreuve écrite niveau Sixième :

On demande ici à un élève de sixième de reproduire des triangles en tenant compte des codages de longueurs et d'angles.

Trace dans le cadre ci-dessous la figure ci-contre en respectant les longueurs indiquées.

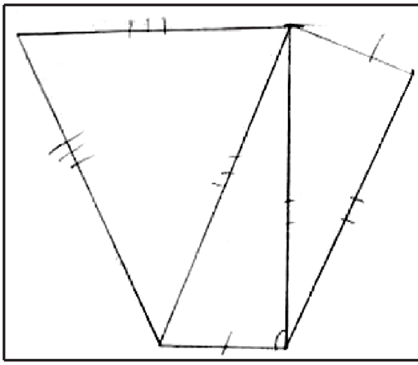


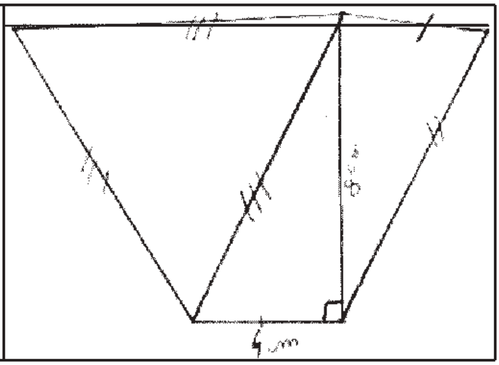
R.C. : 62 %

R.E.
item 1 : 83 %
item 2 : 77 %
item 3 : 68 %

Le triangle rectangle dont tous les éléments sont explicitement fournis est réalisé par 83 % (85 % en 2005), le triangle isocèle par 77 % (75 % en 2005) et l'équilatéral par 68 % (69 % en 2005), la réussite conjointe (62 %) est identique en 2008 et 2005 : pas d'évolution nette.
La réalisation fait appel aux instruments de géométrie : équerre, règle graduée et compas. Leur utilisation est meilleure qu'en 1987.

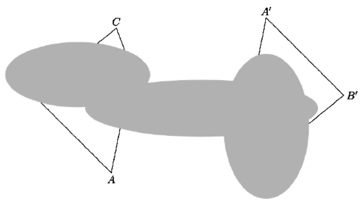
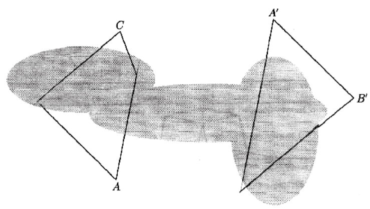
Pourtant, à l'examen des copies, on constate que le compas n'est pas toujours bien maîtrisé même lorsque l'élève semble avoir la bonne démarche et qu'un pourcentage d'élèves plus élevé est capable de reproduire une figure avec plus ou moins de soin.





c) raisonner pour construire

Prenons un exemple(1), celui de la question 58 de l'épreuve B de cinquième et d'une réponse rencontrée parfois dans les copies…

La question	Une réponse
Nous avions dessiné ci-dessous un quadrilatère ABCD et son symétrique A′B′C′D′ dans la symétrie par rapport à un point O. Des taches malencontreuses sont venues obscurcir une partie du dessin. Complète et retrouve les points manquants (B, D, C′ et D′).  R.E. item 1 : *17 %*	Nous avions dessiné ci-dessous un quadrilatère ABCD et son symétrique A′B′C′D′ dans la symétrie par rapport à un point O. Des taches malencontreuses sont venues obscurcir une partie du dessin. Complète et retrouve les points manquants (B, D, C′ et D′). 

Ceci se passerait de commentaires … si nous n'avions décidé de mettre en avant l'importance de l'anticipation (qui dit « symétrie » dit « figures superposables »), de l'observation, et du raisonnement pour construire …

Oserions-nous dire que ce score de 17% de réussite chez les élèves de Cinquième justifie à lui seul le temps que nous devons passer à faire des constructions avec nos élèves, encore et encore ?

(1) Un chapitre plus complet sur les symétries (axiale et centrale) est à lire et découvrir sur le site, commentant largement cette question 58, nous nous contenterons ici d'ouvrir vers ce chapitre…