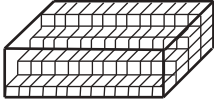
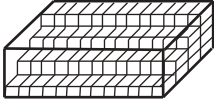


4. Le cube

Appréhender l'espace ...

Souvenons-nous, en 2005,

Nous posions en Sixième la question : et nous obtenions ce décompte sérieux et appliqué :

 <p>On a commencé à remplir cette boîte en carton léger avec des petits sucres, tous identiques et pesant chacun 1,4 grammes.</p> <p>Quelle masse de sucre contiendra la boîte quand elle sera pleine <input type="text"/></p> <p>Explique ta réponse :</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	 <p>On a commencé à remplir cette boîte en carton léger avec des petits sucres, tous identiques et pesant chacun 1,4 grammes.</p> <p>Quelle masse de sucre contiendra la boîte quand elle sera pleine <input type="text" value="16,5g"/></p> <p>Explique ta réponse :</p> <p><i>Il est compliqué de compter les sucres. On a vu que la boîte est remplie de sucres et qu'il y a 1,4 grammes de sucre par boîte.</i></p>
---	---

L'analyse complète de cette question⁽¹⁾ qui au départ posait le problème d'un calcul de volume par dénombrement de « pavés unités », a soulevé une difficulté de lecture : la vision plane d'un empilement n'avait été bien perçue que par un élève sur cinq, et un élève sur huit n'avait pas reconnu une situation concrète (remplissage d'une boîte de légums par exemple) ne traitant alors pas la question.

L'étude de 2008 s'est volontairement restreinte au cube, objet familier (jusqu'à quel point ?) aux jeunes élèves, en s'appuyant sur les programmes de sixième quant au contenu :

(1) Chapitre Volume/perception de l'espace dans la brochure Étude Sixième 2005, Analyse des résultats.

Reconnaître un parallélépipède rectangle de dimensions données à partir
- du dessin d'un de ses patrons,
- d'un dessin le représentant en perspective cavalière.

et de cinquième pour ce qui est des attentes sur les dessins

L'objectif est d'entretenir et d'approfondir les acquis : représenter, décrire et construire des solides de l'espace, en particulier à l'aide de patrons. Passer de l'objet à ses représentations (et inversement) constitue encore l'essentiel du travail.

L'observation et la manipulation d'objets usuels sont des points d'appui indispensables.

Nous disposons pour cela de questions orales, visuelles et écrites, se complétant ou se recoupant, et reprenant souvent des questions phares des études antérieures.

1. Représentation mentale

Voici une question orale portant sur le cube :

Imagine un cube.

1. Combien de sommets a-t-il ?
2. Combien d'arêtes a-t-il ?

R.E. item 1 : 63 %

Pour y répondre, l'élève doit se représenter un cube (à moins qu'il ne connaisse certaines de ses caractéristiques par cœur) : on ne lui a pas fourni un objet sur lequel il aurait pu compter ou dénombrer facilement les sommets et arêtes. L'exercice n'est pas si aisé pour les élèves, peu habitués à faire appel à des images mentales d'objets de l'espace.


Ce sont donc trois élèves de sixième sur cinq qui donnent le bon nombre de sommets, soit par dénombrement à partir d'une représentation mentale du cube, soit par un résultat connu, et seulement un sur deux qui donne le bon nombre d'arêtes. On trouve comme réponses erronées : 24 arêtes (qui viennent certainement de 6 carrés à 4 arêtes ou peut-être, 8 sommets extrémités de 3 arêtes à chaque fois) ou, plus surprenant, 18 arêtes.

2. Interprétation d'un solide représenté en perspective

L'une des questions visuelles reprenait la première question de l'épreuve écrite B :

Questionnaire visuel Sixième et Cinquième

Questionnaire écrit Sixième et Cinquième

<p>Combien faut-il de petits cubes pour constituer le gros cube ?</p> <div style="text-align: right;">  </div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; padding: 5px; margin-top: 10px; text-align: center;"> <p>R.E. item 1 : 41 % 57 %</p> </div>	<p>Voici un cube qui a été trempé dans de la peinture grise. Jean le scie suivant les pointillés (chaque face carrée est partagée en quatre carrés).</p> <p>Combien obtient-il de petits cubes ?</p> <p>Quel est le nombre total de petites faces grises ?</p> <p>Avant de bien regarder les cubes, il écrit :</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Tous les petits cubes sont peints de la même manière ; 2. Tous les petits cubes ont trois faces grises ; 3. Tous les petits cubes ont quatre faces grises ; 4. Tous les petits cubes n'ont que deux faces non peintes ; 5. Tous les petits cubes ont trois faces non peintes. <p style="text-align: center;">Barre ce qui est faux</p> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; padding: 5px; margin-top: 10px; text-align: center;"> <p>Réussite conjointe 6 à 10 : 21 % 28 %</p> </div>
--	---

Dans les deux cas, on donne la même représentation en perspective d'un cube peint et découpé sans faire apparaître les faces cachées et on demande de déterminer le nombre de petits cubes ; dans l'épreuve écrite des précisions sur les couleurs des faces sont demandées. Quelle que soit la question, l'élève est censé se représenter mentalement le cube dans son entier et, pour la question écrite, les faces intérieures des petits cubes ! La réponse « 12 petits cubes pour constituer le grand cube », largement commentée dans les études antérieures, illustre la difficulté d'interprétation du dessin en perspective.

Les scores relevés sont dans le tableau qui suit, certains parlant d'eux-mêmes :

N° QUESTION	Item pris en compte	SIXIÈME 2008	CINQUIÈME 2008	EVAPM 6/2005	EVAPM 6/89	INRP CM2/77
GEE600	nombre de cubes	52%	62%	44%	55%	37%
GEE600	nombre de faces grises	43%	49%	40%	49%	38%
GEE600	RC_6à10	21%	28%	18%	17%	21%

Prenons la première question (nombre de petits cubes), commune aux deux épreuves : les élèves de sixième semblent plus à l'aise sur le questionnaire écrit que sur la question visuelle (10% d'écart au niveau du score de réussite), mais cela semble moins net en cinquième (5% d'écart seulement).

La lecture d'un schéma en perspective semble bien s'améliorer d'une année sur l'autre, sans doute grâce à une meilleure prise en compte des faces cachées.

L'amélioration entre la Sixième et la Cinquième est moins nette sur le décompte des faces grises : la réponse « 12 faces grises » correspond à celle d'un élève ne comptant que les faces qu'il voit sur le dessin fourni sans envisager qu'on ne les voit pas toutes. Certains osent l'abstraction en donnant une réponse multiple de 6 comme 18 et 72 (couleur unique) ou redécoupage de chaque face en quatre carrés.

3. Coder le patron d'un cube.

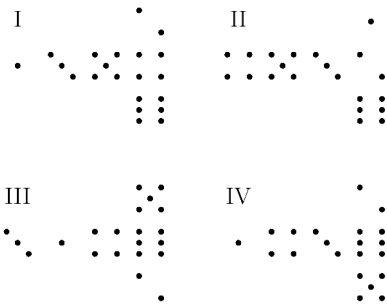
Dans les questions proposées, aucune ne portait sur la construction (ou complément à faire) d'un patron : à chaque fois celui-ci est donné, et il s'agit d'associer des faces opposées ou adjacentes.

Voici une première question, tirée de PISA 2005,



Les dés à jouer sont des cubes avec des faces numérotées selon la règle suivante : la somme des points figurant sur deux faces opposées doit toujours être égale à 7.

Pour chaque découpage ci-dessous, il est possible par pliage de fabriquer un dé qui obéit à la règle précédente.



a	I	V	F	Jnsp
b	II	V	F	Jnsp
c	III	V	F	Jnsp
d	IV	V	F	Jnsp

R.C. : 34 %

R.E.

item a : 70 %

item b : 65 %

item c : 58 %

item d : 47 %

L'élève doit ici appairer les faces opposées pour que la somme des points soit toujours 7 : 96 % des élèves abordent la question et de deux tiers aux trois quarts répondent correctement à chaque item, ce qui marque une nette progression par rapport à 2005. La réussite conjointe reste la même, 34% en sixième et, d'après PISA 2005, elle est de 67% à 15 ans : cela confirme les remarques faites en 2005 sur le temps d'acquisition des notions.

Pour comparaison :

Scores obtenus en 2005 en classes de Sixième (EVAPM 2005)

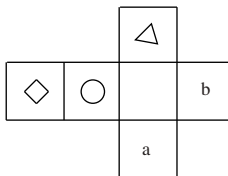
- item a : 64. %
- item b : 58 %.
- item c : 58 %.
- item d : 51 %.

Réussite conjointe : 33 %.

Dans le questionnaire oral Sixième une question de même nature est posée : l'élève doit choisir le bon dessin à placer en face opposée.

Voici le patron d'un cube. Deux faces opposées doivent porter le même dessin.

1. Quel dessin doit être porté par la face désignée par a ?
2. Quel dessin doit être porté par la face désignée par b ?



R.E. item 1 : 67 % **R.E. item 2 : 52 %**

La meilleure réussite pour la face « a » s'explique par la disposition du patron : le pliage haut-bas est naturel.

Les erreurs pour la face « b » rejoignent celles commises sur le dé à jouer (figure IV) : les faces opposées ne sont pas les plus éloignées sur le patron proposé.

Dans les questions suivantes il fallait associer des arêtes communes à deux faces. Le pliage direct fait coïncider a et n dans V-16, placer g et h dans GEE601: ce sont les items les mieux réussis. Dans le questionnaire visuel le temps d'observation est limité et l'élève ne peut pas manipuler sa feuille ou découper un patron (assez nombreux dans les copies) : cela explique un score de réussite inférieur. En sixième le pourcentage de réponses erronées croît en fonction du nombre de pliages nécessaires pour une validation matérielle du collage. Les résultats sont stables en cinquième.

Questionnaire visuel sixième (V-16)

Questionnaire écrit Sixième et Cinquième (GEE601)

<p>Voici le patron d'un cube.</p> <p>Lorsqu'on réalise le cube :</p> <ul style="list-style-type: none"> - à quel segment vient se coller le segment a ? - à quel segment vient se coller le segment i ? - à quel segment vient se coller le segment e ? <div style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 5px; margin-top: 10px; text-align: center;"> <p>R.E. item 1 : 40% 55%</p> <p>R.E. item 2 : 18% 28%</p> <p>R.E. item 3 : 12% 18%</p> </div>	<p>Voici le patron d'un cube, les arêtes de ce cube sont désignées par les lettres a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k et l.</p> <p>Complète le patron en écrivant dans les demi-cercles les lettres qui correspondent aux arêtes</p> <div style="text-align: center;"> </div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 5px; margin-top: 10px; text-align: center;"> <p>R.C. : 21% 31%</p> <p>R.E. :</p> <p>item 1 : 52% 62%</p> <p>item 2 : 51% 62%</p> <p>item 3 : 42% 53%</p> <p>item 4 : 32% 42%</p> <p>item 5 : 30% 40%</p> </div>
--	---

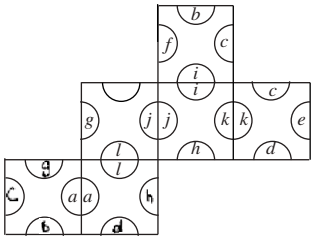
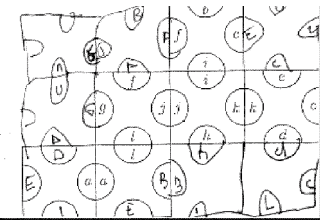
En sixième ou cinquième nommer des arêtes communes par une même lettre n'est pas une tâche aisée ; les élèves repèrent assez souvent une arête commune lorsque le patron permet par un seul pliage de faire coïncider les deux arêtes, les choses se compliquent lorsqu'il faut imaginer des pliages successifs.

Prenons par exemple la question de l'épreuve écrite :

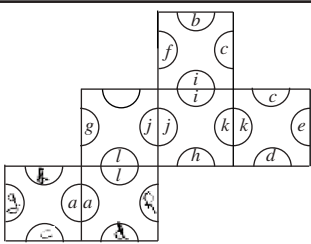
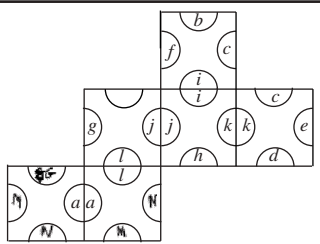
- pour un pliage (arêtes g et h) on note des scores de réussites voisins de 50% en sixième contre 62% en cinquième,
 - pour deux pliages (arête d), le score chute de 10% en sixième comme en cinquième,
 - et pour trois : (arêtes c et b), chute du score de 10% encore dans les deux niveaux.
- Au vu de ces deux questions, on a envie de conclure que les élèves de cinquième semblent mieux associer patron et solide.

Quelques erreurs rencontrées au gré des copies :

<p>- une arête est souvent commune à plus de deux faces :</p>	<p>- deux faces sont repliées l'une sur l'autre :</p>

- des côtés parallèles du patron sur des faces distinctes éloignées sont des arêtes confondues	Et puis, il y a ceux pour qui le mot patron n'a pas été entendu...
	

Et enfin, on peut aussi créer de nouvelles lettres faute d'avoir compris la consigne, ou reporter les lettres en suivant plus ou moins une permutation.

	
---	---

En conclusion :

Globalement la géométrie dans l'espace, perception et codage des arêtes, a pris une place plus importante dans les classes et les compétences dans ce domaine sont légèrement améliorées avec l'actuel programme. Les scores obtenus en Sixième et en Cinquième confortent l'idée que le temps est l'allié du jeune collégien, en tout cas en ce qui concerne sa perception de l'objet cube.

En guise d'ouverture...

N'ayons pas la naïveté de croire que tous nos élèves jouent ou ont joué régulièrement avec des petits cubes à imbriquer, ni qu'ils n'aiment pas y jouer : arrivez un jour en classe avec des pièces du cube SOMA, distribuez généreusement les 7 pièces à chacun d'entre eux, et laissez faire... Aussitôt, ils assemblent, comparent, observent, ... manipulent ! Certains reconstituent le cube en moins de temps qu'il ne faut pour l'écrire, d'autres se contentent de pavés. Mais aucun ne reste inactif !

De nombreuses pistes de travail se trouvent dans les brochures suivantes :

- Jeux 3 et 5 de l'APMEP.
- Jeux 8 de l'APMEP : voir l'excellent thème Nombres et solides.
- D'autres objets mathématiques de l'APMEP de Lorraine.
- Autour du cube SOMA de l'IREM de Lorraine.

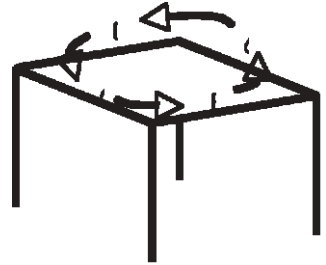
(NOTA : les activités, travaux d'élèves, fiches de travail des deux dernières brochures sont téléchargeables sur le site de la régionale de Lorraine, il faut s'y rendre !).

Le cube SOMA a fêté ses 60 ans dans le Petit Vert⁽²⁾ n° 46, puis 70 ans (en 2006) dans le BV n° 461. N'hésitons pas à ressortir cubes, articles et brochures de nos tiroirs, (voire les découvrir pour les plus jeunes lecteurs) : reconnaissances de pièces, vues en perspectives, jeux d'ombres, patrons, ..., tout y est !

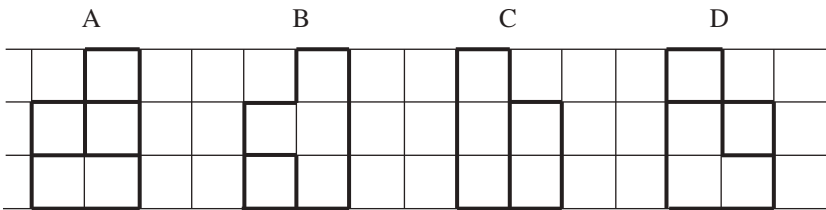
Il y a même à inventer ... comme cette activité proposée en annexe par Bruno Alaplantive⁽³⁾ dans le stage Jeux qu'il a animé.

Annexe :

Vous êtes assis autour de la table comme ceci :

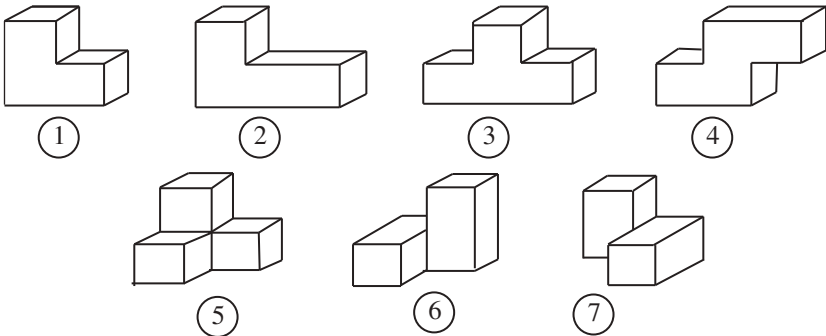


Décidez qui est A et déterminez qui sont B, C et D.
Sur la table est posé un assemblage de certaines pièces d'un cube SOMA. De sa place, chacun doit voir :



Réalisez cet assemblage sur votre table.

Les pièces du cube :



(2) Le Petit Vert est une publication de la Régionale de Lorraine. Rendez-vous sur le site de la régionale pour abonnement ou téléchargement d'articles

(3) Bruno Alaplantive actuellement en poste au lycée de Calgary, animait, avant de partir vers d'autres contrées, un stage Jeux très prisé dans la Régionale de Toulouse.