2. Introduction au calcul littéral

I. Deux rectangles … deux énoncés.

Voici deux énoncés posés à deux classes de Sixième début octobre :

Le professeur annonçait qu'il s'agissait d'un « mini défi », pas noté , anonyme. Les élèves disposaient d'une feuille format A5 sur laquelle était noté l'énoncé du problème.

Cette feuille servait de support de recherche et de réponse. Il était demandé aux élèves d'expliquer comment ils arrivaient au résultat, et il leur était précisé de laisser toutes les traces de leurs recherches, essais, …, donc gommer était interdit !

Les élèves travaillaient à leur rythme sur un travail de correction personnel. Une fois ce travail terminé, ils le présentaient au professeur qui distribuait alors la fiche « mini-défi ». Chaque élève l'a donc commencé à un moment différent. Au bout de 10 minutes environ, les élèves ramenaient leur solution.

---

(5) Au fil des années, les équipes EVAPM ont fluctué suivant les niveaux (collège ou lycée) auxquels s'adressaient les enquêtes. Équipe 2008 : Antoine Bodin (consultant), François Couturier (UFR Sciences et techniques, Université Franche Comté), Frédérique Fournier (Collège, Tournefeuille), Arnaud Gazagnes (Lycée, Troyes), Roger Guénon (Collège, Bagnols/Cèze), Lise Heilbronner (Lycée, Rennes), Philippe Le Borgne (IUFM Besançon), Marie Parent (Collège, Avranches) et François Pétiard (UFR Sciences et techniques, Université Franche-Comté).

Énoncé 1 posé à la classe A (27 élèves) :
Un rectangle a pour périmètre 30 cm. Sa longueur est le double de sa largeur. Quelles sont ses dimensions ?

Énoncé 2 posé à la classe B (29 élèves) :
Je suis un rectangle. Mon périmètre est de 80 cm. Ma longueur mesure 20 cm de plus que ma largeur. Combien mesure ma largeur ? ma longueur ?

Analyse a priori de la tâche :

Chacun des deux problèmes peut se résoudre par une équation. Celles-ci sont bien entendu hors programme de Sixième.

Le premier énoncé pourrait éventuellement donner naissance à une égalité de la forme : 6 × largeur = périmètre.

Quelles sont les tâches de l'élève :

Énoncé 1	Énoncé 2
– Associer le mot « périmètre » à la mesure d'un contour. – Associer par une opération les deux grandeurs longueur et largeur : « sa longueur est le double de sa largeur » : largeur × 2 = longueur. – Se représenter un rectangle. – Mettre en relation deux grandeurs pour obtenir une égalité non triviale : 6 × largeur = périmètre.	– Associer le mot « périmètre » à la mesure d'un contour. – Associer par une opération « ma longueur mesure 20 cm de plus que ma largeur ». – Se représenter un rectangle. – Mettre en relation deux grandeurs pour obtenir une égalité non triviale : 4 largeurs + 2 × 20 cm = périmètre.

L'élève peut procéder par tâtonnements et essais successifs. À noter toutefois, que le premier rectangle peut être tracé sur une feuille A5 sans problème, celui du deuxième énoncé tout juste (il occupe quasiment tout l'espace disponible).

Quelles procédures trouve-t-on chez les élèves ?

Énoncé 1 :

a) Procédure mentale avec tracé en parallèle : 20 élèves sur 27.

Tous parviennent au résultat.

Ces élèves-là essaient mentalement ou par écrit des valeurs pour la largeur.

- 10 présentent uniquement le rectangle tracé avec les bonnes mesures pour 9 d'entre eux. La moitié d'entre eux se contentent du tracé comme réponse : « tracer » = « trouver ».
- 9 justifient les dimensions indiquées après coup :

La longueur de ce rectangle est de 10cm.

La largeur de ce rectangle est de 5cm.

Car : 10×2=20
5×2=10
10+20=30

- On nous dit que la longueur est le double de sa largeur: 10×2=20
- Nous prenons la moitiée du nombre de la largeur = 10÷2=5
- Ensuite nous multiplions 5×2=10
- Et ensuite on fait: 20+10 et nous trouvons le perimetre donné de ce triangle

– Un élève passe par le demi-périmètre et tente d'expliquer le 5 cm de la largeur :

ces dimensions sont de 10 cm de long et 5 cm de large car
30/2=15 l'addition d'une de ces longueur est d'une de ces largeure font 15 cm
comme la longueur est le double de sa largeur sa longueure mesure donc 10 cm est sa largeur 5 cm

Aucune trace écrite d'un éventuel calcul :

30 : 6 = 5 ou 6 × … = 30 ni 15 : 3 = 5 ou 3 × … = 15.

Les seules traces écrites mentionnent :

– Le double de 5 c'est 5 + 5.
– J'essaie 3 + 6 = 9 ; 4 + 8 = 12 ; 5 + 10 = 15, ça marche.

b) Procédure calculatoire sans recours au dessin : 7 élèves sur 27.

Aucun ne trouve le résultat.

Pour la plupart les traces écrites sont :

– 30 : 2 = 15 ; 15 : 2 = 7,5. Dimensions : 15 cm et 7,5 cm.
– 30 : 3 = 10 ; 10 x 2 = 20. Dimensions : 10 cm et 20 cm.

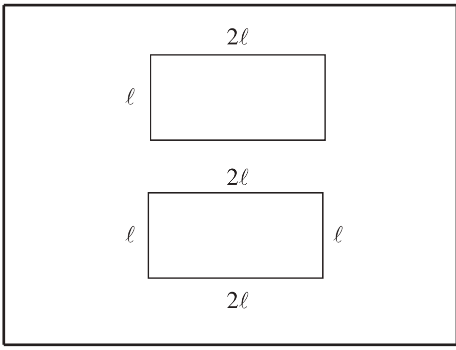
Énoncé 2 :

Les élèves ont tous procédé par essais-erreurs-rectifications pour répondre, seuls deux élèves ont tracé le rectangle (difficile dans l'espace dont ils disposaient).
– 16 élèves trouvent la bonne réponse et répondent que « **Ma** largeur est de 10 cm et **ma** longueur est de 30 cm », ou que « **Ta** largeur est de 10 cm et **ta** longueur est de 30 cm ».
– 11 ne prennent pas en compte la donnée du périmètre.
– 2 passent par le demi-périmètre et proposent 15 et 35 ou 15 et 25.

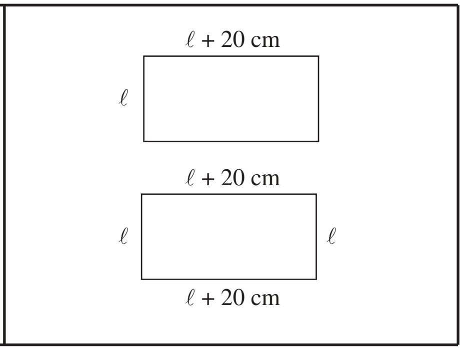
Qu’en conclure ?
Que le recours à la représentation mentale du rectangle et de la visualisation de ses propriétés (côtés opposés égaux), et celle de la notion de périmètre (voir, anticiper le contour à mesurer) permet au premier problème de géométrie, comme à bien d’autres de prendre forme. En quatrième, par exemple, on attend d’un élève qu’il visualise le rectangle avec ses côtés opposés égaux, ses diagonales, son cercle circonscrit, …
Si on prend le temps de solliciter le dessin, il deviendra instinctif, un outil disponible et pas un handicap comme cela semble le cas pour les élèves en difficulté : ceux-là mêmes qui ne se sont pas lancés dans le dessin du rectangle dans l’exercice 1.

Retournons à nos rectangles, l’objectif serait d’arriver avec les élèves à de telles représentations :

Énoncé 1



Énoncé 2



Les résolutions possibles sont alors pour l’élève :

Utiliser le fait que le périmètre du rectangle vaut 30 cm et « compte » 6 largeurs ou se calcule en multipliant la largeur par 6. Détermination de la largeur soit par opération à trou, soit par division.	Pour obtenir la valeur de la largeur, retirer 2 fois 20 cm au périmètre. Le reste vaut 4 fois la largeur. L’élève peut déterminer par division ou opération à trou la valeur de la largeur.

L’écriture des équations viendra en Cinquième.

II. À travers les programmes.

On peut lire en tout début du document d’accompagnement intitulé « Du numérique au littéral » (mise à jour de février 2008) :

Un des objectifs de l’enseignement mathématique au collège est que le calcul littéral prenne place dans les moyens d’expression et de résolution de problèmes disponibles pour les élèves au côté du calcul numérique, des figures, des représentations graphiques. Dans cette optique, il s’agit d’installer progressivement l’habitude de recourir au calcul littéral, le programme s’organisant autour de quelques lignes directrices :

– *en 6^e et 5^e, initiation à l'usage des lettres, dans des situations où leur utilité peut être reconnue par les élèves, notamment au travers de l'élaboration et l'utilisation de formules ;*
– *en 4^e et 3^e, initiation à la résolution de problèmes par des méthodes algébriques liées souvent à l'utilisation de fonctions.*

Au sortir du cycle 3, les élèves ont, en effet, rencontré des lettres en mathématiques et les utilisent :
– comme symbole d'unités : 3 m,
– pour désigner un objet précis : le point A,
– pour désigner une grandeur dans une formule : P = (L + l) × 2.

Lorsqu'on les interroge sur cette dernière formule qu'ils brandissent avec fierté au premier « périmètre » venu, à condition que l'on demande un calcul de périmètre, car dans l'expérimentation précédente elle n'est apparue sur aucune fiche réponse, ils répondent que P est la première lettre du mot Périmètre, L, celle du mot longueur, et l celle du mot largeur et précisent alors « ça veut dire que, pour calculer le périmètre d'un rectangle, j'ajoute la longueur et la largeur, et je multiplie par deux. »

La route est longue et semée d'embûches pour le collégien : cette bonne vieille lettre va leur jouer bien des tours ; tour à tour variable, indéterminée, inconnue, paramètre, statuts bien différents pour nous, professeurs, mais pas tant que ça pour eux, élèves !

En quatrième, par exemple, la démonstration de l'égalité $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ est soigneusement faite. Combien d'élèves perd-on ce jour-là ? Pourquoi « démontrer » ? Combien, au fond d'eux ne songent pas que c'est (encore ?) une lubie du prof de math qu'ils ont devant eux ? une démonstration qui nous vaut à la prochaine réunion parents-professeurs l'incontournable « ah ! moi les équations j'ai jamais compris… ». Je l'ai dit, la route est longue !

III. Que font nos élèves avec les lettres ?

Alors que faire en Sixième et Cinquième ?
C'est le début de la scolarité du collège, les bases continuent à se mettre en place, et c'est l'occasion de commencer à formaliser certaines notions, d'apporter du neuf pour s'exprimer, expliquer, justifier.

a) Les lettres pour désigner

L'énoncé suivant a surpris bien des élèves lors du passage de l'épreuve visuelle : yeux arrondis !, mou dubitative, regard interrogateur en direction du prof-minuteur

Questionnaire visuel en Sixième

À la place de quelle lettre peut-on mettre le résultat du calcul « 7,9 × 978 » ?

$$\text{A} < 100 < \text{B} < 1\,000 < \text{C} < 10\,000 < \text{D} < 100\,000$$

R.E. item 1 : 47 %

Et c'est en reconnaissant le modèle « à trous »

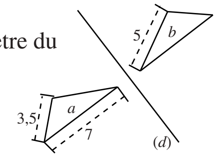
… < 100 < … < 1 000 < … < 10 000 < … < 100 000

qu'ils ont pu y répondre.

L'utilisation de lettres dans les questions suivantes n'a pas perturbé les élèves :

Les triangles *a* et *b* sont symétriques par rapport à la droite (*d*).

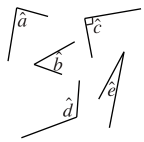
Quel est le périmètre du triangle *b* ?



R.E. item 1 : 49 %

Voici les mesures des cinq angles représentés ci-contre : 85°, 90°, 18°, 50°, 115°.

Complète les égalités de la feuille.



R.E. item 1 : 62 %|*71 %*

On pourrait peut-être demander aux élèves de ce qu'ils pensent des lettres. Faire émerger alors l'idée qu'il est plus simple de désigner un objet ou son emplacement par une lettre plutôt que par une description « le premier … en partant de la gauche ». De plus, l'identification par les lettres facilite grandement les échanges lors des discussions.

b) Les lettres dans les formules.

On l'a dit, lorsqu'il s'agit de calculer un périmètre de rectangle, la formule surgit sans problème. En Sixième, le périmètre du cercle vient se rajouter ; une formule donc qui contient des lettres au statut d'indéterminées (*p* et *r*), mais une désigne un nombre connu, et pas n'importe lequel : π.

Questionnaire 6°

Pour calculer la longueur L d'un cercle de rayon R, on applique la formule :

$$L = 2\pi R.$$

À une unité près par défaut, la longueur d'un cercle de rayon 4 m est : (on a pris 3,14 comme valeur approchée de π)

a	26 m	V	F	Jnsp
b	50 m	V	F	Jnsp
c	25 m	V	F	Jnsp
d	12 m	V	F	Jnsp

R.E. : 22 %

Le faible taux de la réussite conjointe vient du fait que les élèves ont entouré les deux réponses : 25 m et 26 m. Il s'agit là d'une erreur d'arrondi, pas d'ordre de grandeur ni d'utilisation de la formule. Près de 70% écartent la proposition 50 m, mais seulement un sur deux écarte 12 m, l'élève n'utilise alors que les deux valeurs données dans le cadre : 3,14 et 4.

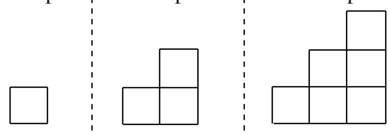
c) Les lettres pour exprimer

Questionnaire visuel Sixième et Conquième

Observe les différentes étapes de construction.

Combien de petits carrés compte-t-on à la cinquième étape ?

1re étape | 2e étape | 3e étape



1 petit carré | 3 petits carrés | 6 petits carrés

et on continue de la même façon…

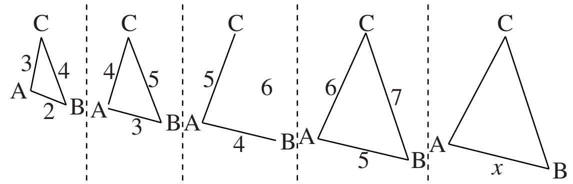
R.E. item 1 : 28 %|*29 %*

Difficile ici de formaliser la construction : à la n-ème étape on rajoute n petits carrés aux $n(n-1)/2$ déjà présents, mais amorcer l'idée
– à la première étape on ajoute 1 petit carré
– à la deuxième on rajoute 2 petits carrés $(2+1=3)$
– à la troisième, 3 petits carrés $(3+3=6)$
– à la quatrième, 4 petits carrés $(6+4=10)$
– donc à la cinquième, 5 petits carrés $(10+5=15)$
et ensuite demander en classe : et à la 10-ème ? 20-ème ? en autorisant les calculatrices par exemple ou un tableur…

Deux questions portaient en Cinquième sur le thème « exprimer en fonction de … »

– la première dans le questionnaire visuel :

On construit des triangles dont les côtés ont pour mesure trois nombres entiers consécutifs comme ci-dessous



Exprime les longueurs AC et BC en fonction de x

R.E. item 1 : *6 %*

Côté statistiques

– 6% expriment correctement les deux longueurs
– 15% de donnent pas de réponse.

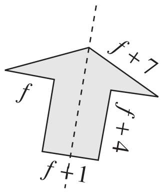
Très faible taux de réussite, certes la question était limitée en temps, mais celle de l'épreuve écrite ne l'était pas…

Côtés feuilles de réponses, on peut relever …

Elève	Lambda1	Lamda2	Lambda3	Lambda4	Lamda5	Lamda6	Lamda7	Lambda8	Lambda9	Lamda10	Lamda11
AC	7	6	$7(1\times x)$	$3x$	$4y$	$x+1$	9	$7(x-1)$	$x+7$	$7x$	0.003cm
BC	8	7	$6(1\times x)$	$4x$	$5y$	$x+2$	10	$8(x-2)$	$x+8$	$8x$	1189cm

Longue la route, très longue …

La deuxième question de ce type dans l'épreuve écrite en Cinquième :

Dans la figure ci-contre le trait en pointillés représente l'axe de symétrie de la flèche. Exprimer le périmètre de la flèche en fonction de la longueur f inconnue. Le périmètre est égal à ....  **R.E. item 1 : *9 %***	Question exclue par aucun collègue, et pourtant … 9% des élèves seulement parviennent à écrire la bonne expression.

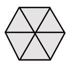
Sur les copies des élèves, on trouve comme réponse :

- $f + 25$;
- $f + 7 + f + f + 4 + f + 1 + 7 + 4 + f + f + 7$;
- $30 + f$ ou $30\,f$ (qui vient de $7\,f + 23$) ;
- $(f + 7 + f + f + 4 + f + 1) \times 2$.

d) Les lettres pour résoudre, peut-être…

Pas d'équation *a priori*, ici, mais première approche des équations via ce genre d'exercices.
Faire appel, en effet, à une mise en équation pour résoudre un problème est souvent « peu naturel » pour les plus jeunes élèves, d'autant que, top souvent, le-dit problème peut se résoudre sans avoir recours à une équation !

Questionnaire visuel 6° et 5°

Cette figure est un hexagone régulier composée de 6 triangles équilatéraux identiques  Le périmètre d'un petit triangle est 12 cm. Combien mesure le périmètre de l'hexagone **R.E. item 1 : 22 %|*28 %***	La question a déjà été analysée en 2005. Des travaux d'élèves montraient également la perception du périmètre qui se « déroule ». On retrouve en 2008 bien évidemment l'erreur : périmètre de l'hexagone égal à 6 fois celui du triangle … pour des élèves en Sixième et … en Cinquième. Ce qui pourrait peut-être être évité si la longueur d'un côté d'un des petits triangles, et donc de l'hexagone était notée x sur le dessin, on aurait alors x vérifie « 3 fois x égale 12 »… Le lien avec le périmètre de l'hexagone serait alors de « 6 fois x » ou « 2 fois $3x$ ».

Questionnaire visuel 6°

Imagine un rectangle. Son périmètre mesure 30 cm et sa largeur mesure 4 cm. Combien mesure sa longueur ? **R.E. item 1 : 31 %**	Si le terrain a bien été préparé, via ce genre d'exercices, on pourra en quatrième plus facilement faire écrire : si x désigne la largeur de ce rectangle, x vérifie l'équation : $2x + 2 \times 4 = 30$.

Les questionnaires oraux et visuels détachent l'élève de la rédaction d'une réponse. Celle-ci reste très importante en mathématiques, mais il est aussi important de développer le goût de l'essai, du calcul rapide, mental qui permet de débloquer une situation. Pourquoi les élèves de troisième ne résolvent pas, sans hésitation, l'équation $4x + 7 = 42$ sans toute une artillerie de « je fais passer de l'autre côté » ?