SYMÉTRIES, TRANSLATION, ROTATION

QUELQUES OBJECTIFS FONDAMENTAUX, ESSENTIELLEMENT POUR LE COLLÈGE.

Henri Bareil

Les programmes changent, mais les impératifs d'un bon enseignement des mathématiques demeurent. Voici un texte que, à notre connaissance, Henri n'a pas publié mais qui nous paraît très représentatif de son style, de sa manière de partager avec ses collègues ses réflexions et ses conseils sur une nouvelle question au programme, simplement, directement, sans grandes phrases ni théories mais avec beaucoup de profondeur, d'attention au détail, en un mot de sens pédagogique. Le texte débordait le niveau du collège et était une réponse aux nouveaux programmes institués en 1985 lesquels étaient différents de ceux d'aujourd'hui. Mais ce que dit Henri peut encore inspirer et stimuler la réflexion de nombre de nos collègues, dans le lieu et le niveau où ils enseignent, sur ce point central de la géométrie que représentent les transformations, et cela indépendamment d'un programme explicite. Le texte, manuscrit, est daté du 3 mai 1988 ; il n'était visiblement pas terminé. Nous l'avons retranscrit, en écartant les commentaires contingents, relatifs à la situation spécifique de 1985. Nous avons également choisi de garder les figures originales « à main levée » d'Henri.

Jean-Pierre Friedelmeyer

Notre propos est de mettre en valeur les objectifs fondamentaux concernant toutes les isométries. Nous essaierons de le faire de façon suffisamment synthétique pour apporter un point de vue renouvelé.

Quelques précisions sur nos notations :

— Pour alléger notre texte, nous désignerons par « DB » (« données de base ») le fait de connaître :

* Pour une symétrie axiale, son axe,
* Pour une symétrie centrale, son centre,
* Pour toute autre rotation, son centre, son angle, son sens,
* Pour toute translation, son vecteur.

— Nous distinguerons « manipulation », mouvement physique, de « tracé » et « construction », les tracés et constructions étant réalisés avec tous instruments usuels, avec une exigence plus particulière de justification pour les « constructions ».

— Nous désignerons toujours par F' l'image d'une figure F.

— Nous utiliserons le vocable « isométries ». Mais on notera qu'il n'appartient pas au bagage des Collèges.

— Les Commentaires des programmes des Collèges ont privilégié l'expression « symétrie axiale » pour « symétrie orthogonale par rapport à une droite ». Nous avons gardé cet « abus de langage ».

Nous insistons, bien entendu, sur « l'étape 1 », qui est celle des apprentissages de base.

— Pour des problèmes traités ici par une symétrie, une rotation ou une translation, d'autres méthodes sont possibles (« cas d'égalité » par exemple). Il serait intéressant de les comparer : en général elles font appel à une vision différente, et plus statique, des figures.

— Pour penser à utiliser une symétrie, une rotation ou une translation, il convient d'avoir d'abord multiplié leurs approches expérimentales et acquis une vision globale de leurs effets.

1. FORMER ET DÉGAGER CONCEPTS ET IMAGES MENTALES

1. 1 Maîtriser le mouvement physique le plus simple (le plus « économique » envisageable) permettant de réaliser expérimentalement telle ou telle isométrie : selon les cas, pliage, retournement, rotation ou glissement rectiligne d'un calque.

Remarque : d'autres mouvements physiques sont possibles.

* Par exemple, on pourrait :

- pour une symétrie centrale, tourner, de 540° !
- pour une translation, tourner de 45°, puis glisser rectilignement, puis tourner de 45° dans l'autre sens…

* Tout cela est utile pour :

- apprendre à différencier mouvement physique et transformation géométrique,
- ouvrir des voies intuitives à des compositions ou à des décompositions d'isométries (ainsi, pour le dernier exemple cité, à propos de la composition de deux rotations d'angles opposés et de centres distincts).

Cela permet :

- de percevoir **globalement les figures**, ce qui est essentiel pour l'intervention des isométries comme outil de recherche et de preuve,
- de former des **images mentales** permettant d'anticiper et de contrôler les effets des isométries,
- de dégager des invariants et, notamment, une propriété « forte » de conservation valable pour toutes les isométries, avec retournement dans la symétrie axiale, sans retournement dans les autres cas :

Propriété fondamentale n° 1 : Toute figure est superposable à son image.

Ainsi pourra-t-on affirmer immédiatement qu'un parallélogramme a pour image un parallélogramme (superposable), etc.

1. 2 Maîtriser une réalisation de figure-image à l'aide d'un point générateur de la figure initiale.

Ceci est notamment possible grâce :

- à des **systèmes articulés**, tels que les symétriseurs (l'utilisation de pantographes

pour la symétrie centrale peut ouvrir sur le fait que la symétrie, déjà cas particulier de la rotation, est aussi un cas particulier d'une autre transformation géométrique),
- aux **tables traçantes et aux ordinateurs** : des logiciels adéquats permettent, lorqu'un point engendre une figure F, de voir se générer la figure F' décrite par l'image M' de M.

De là diverses activités : par exemple un point A et les « DB » étant donnés, comment déplacer A pour que son image A' vienne frapper une cible donnée,…

Ces réalisations par **points générateurs** vont permettre d'ancrer la propriété suivante (évidente, mais sans cela très peu consciente, de telle sorte qu'on n'y pense jamais quand elle serait utile, par exemple dans des problèmes de construction) :

> **Propriété fondamentale n°2 :**
> **Si un point M doit appartenir à une figure F, alors son image M' appartient à F'.**

D'où se déduit que, si M doit appartenir à la fois à F et f, alors M'…

1. 3 Préparer ou conforter ces acquisitions par d'autres moyens :
- **découpages** (ribambelles — cf. Bulletin Vert n° 363—, dentelles et napperons,)
- étude ou réalisation de **papiers peints**,
- usage de **films**,
- **mise en opposition** totale ou partielle, pour la propriété fondamentale n° 1, **avec des non-isométries** simples : symétries obliques, transformations conchoïdales, homothétie, inversion,…

Remarques pour les symétries obliques :
Elles sont particulièrement intéressantes :
—pour mieux faire prendre conscience de la condition d'orthogonalité de la symétrie axiale « du programme »,
—comme exemple (démontrable pour les triangles, et de là extensible) d'une conservation des aires sans conservation des longueurs.

1. 4 Remarques générales (connues !, brièvement rappelées pour mémoire)
* L'axe d'une symétrie axiale ou une translation impose une direction qui peut s'opposer aux **directions naturelles de référence** (verticale ou horizontales, tacitement représentées parallèlement aux bords d'une feuille de papier, et renforcées par d'éventuels quadrillages).

D'où, parfois, de fâcheuses « traductions » de symétries orthogonales en symétries obliques (avec d'autant plus de candeur que les représentations traditionnelles de solides en perspective cavalière traduisent « obliquement » des orthogonalités.

De là l'obligation d'utiliser des **directions variées**, parallèles ou non aux bords de la feuille, et du papier blanc aussi bien que quadrillé.

* Dès qu'une figure et son image vont être **imbriquées**, c'est plus difficile, … et il s'agit donc de s'en préoccuper.

2. PENSER LES FIGURES DU POINT DE VUE DES ISOMÉTRIES

2. 1 Associer à chaque isométrie une « figure-clé », l'association jouant dans les deux sens, en un réflexe immédiat :

— symétrie axiale et **médiatrice**,
— symétrie centrale et **milieu**,
— rotation (autre que de 180°) et **triangle isocèle**,
— translation et représentants d'un **vecteur**.

2. 2 Caractériser, autant que possible, les figures grâce aux isométries.

Par exemple, le triangle isocèle et le trapèze isocèle peuvent l'être par une « auto-symétrie » axiale.

Ces caractérisations sont très fécondes et rassemblent en elles-mêmes beaucoup de propriétés, classiques on non. Ainsi celle du trapèze isocèle ABCD, de bases AB et CD, affirme implicitement que BC = AD, que AC = AD, que $\widehat{A}=\widehat{B}$ et $\widehat{C}=\widehat{D}$, que (AB) et (CD) se coupent sur l'axe de symétrie, et de même (AD) et (BC) si le trapèze n'est pas rectangle, que $\widehat{CAD}=\widehat{DBC}$, etc. Encore faut-il bien connaître d'abord les conservations de la symétrie axiale !

De plus, **il ne s'agit pas d'enfermer une figure dans une caractérisation**, si féconde qu'elle apparaisse. Par exemple, le parallélogramme relève à la fois de la symétrie centrale et de la translation.

Et la caractérisation du triangle isocèle par une auto-symétrie axiale est d'un très faible secours si, dans un problème, une rotation est l'outil à envisager. Mieux vaut alors **caractériser le triangle isocèle par l'existence d'une rotation** envoyant un côté sur un autre (ce qui est une traduction dynamique de la définition élémentaire du triangle isocèle).

3. DESSINER… « ÉCONOMIQUEMENT »

* Les manipulations et les propriétés dégagées permettent de construire l'image d'un point et de ramener la construction de l'image F' d'une figure F à celle d'un minimum de points pertinents.

* De plus, la translation et la rotation (d'un quart de tour) permettent de **justifier simplement des tracés sur quadrillages**, de parallèles pour la translation, de perpendiculaires pour la rotaion, du moins à partir de nœuds du quadrillage :

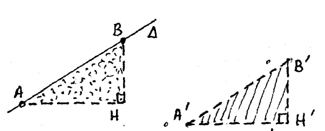


Fig 1

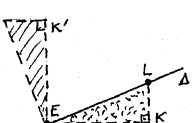


Fig 2

Il suffit de considérer, en translation figure 1, et en rotation figure 2, le triangle sablé et son image hachurée, l'image étant obtenue avec les côtés de l'angle droit.

Remarques :
1° On peut proposer **des dessins à compléter**.
On peut le demander à partir de données **surabondantes** (« DB » et une partie de F' ; plusieurs points de F' ; …) ; il faut alors vérifier la non-contradiction entre ces données et, le cas échéant, faire proposer des choix qui l'éliminent.
2° **La recherche de l'image d'une figure F teste la façon dont on sait caractériser celle-ci**, par exemple :
- si F est un parallélogramme,
- si F est un arc de cercle,
- si F est une droite : sait-on la déterminer par deux points, éventuellement librement et bien choisis, ou par un point et la direction. Sait-on qu'on ne « dessine » jamais une droite, mais seulement des « représentants », dont on peut changer ?

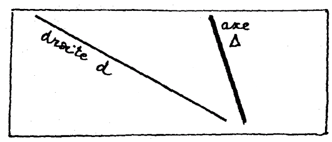


fig 3

Des difficultés pour tracer des figures symétriques (ainsi, figure 3, pour celle de d) peuvent provenir de lacunes antérieures et permettre de les combler.
3° Il faut savoir dessiner F', approximativement, **à main levée**. Cela correspond à une bonne imprégnation d'images mentales…
4° Un **auto-contrôle** est souhaitable.
Ce sera longtemps utile avec un calque, notamment pour la rotation.
5° **Tracés « point par point »** : il faut savoir y recourir lorsqu'une figure relève d'autres lignes que des droites ou des cercles, mais non pas dans ces cas !

4. RECONNAÎTRE ET IDENTIFIER UNE ISOMÉTRIE

(à propos de polygones, cercles ou arcs de cercle, frises, papiers peints, pavages,…) et cela sous les deux aspects :
- **action sur une figure**,
- **invariance d'une figure**.

4. 1 **Cela s'exprime, pour le premier aspect, par divers savoir-faire** :
— Savoir réfuter, à vue, la possibilité de passage de F à F' par telle isométrie. Il suffit qu'une propriété soit manifestement défaillante :
- non superposabilité (avec ou sans retournement selon les cas),
- propriétés d'une droite et de la droite image, ou d'une demi-droite et de son image, etc.

— Savoir, au contraire, conjecturer à vue telle isométrie et ses « DB » et, si l'on dispose d'éléments précis, savoir démontrer ces conjectures.
— Savoir reconnaître et « rectifier » des erreurs de détail (Cf. jeu classique)…

4. 2 **La mise en évidence des invariances d'une figure par telle ou telle isométrie est particulièrement importante** :

Exemples

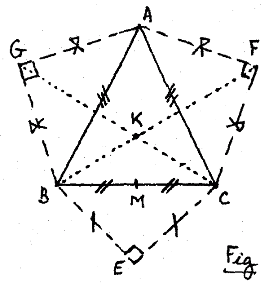


Fig 4

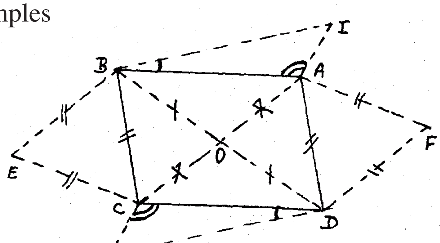


Fig 5

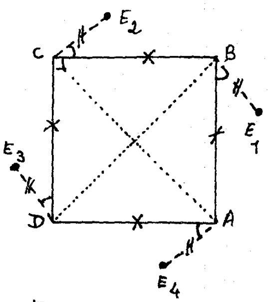


Fig 6

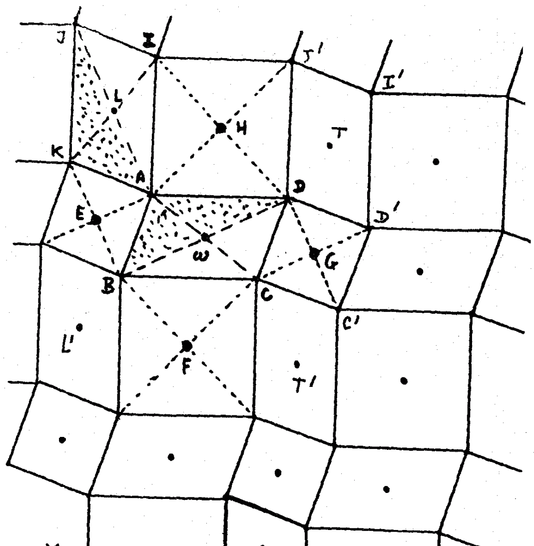


Fig 7 (avec des parallélogrammes et des carrés)

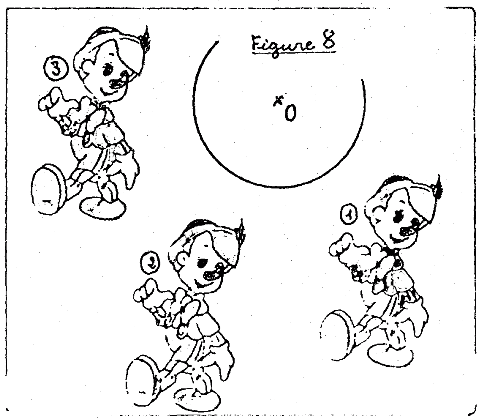
Les figures 4 et 5 découlent de figures simples, triangle isocèle ou parallélogramme, présentant **une symétrie préservée** par les constructions qui complètent ensuite les figures.

La figure 6 découle d'un carré, invariant dans des diverses rotations et cette invariance est préservée par l'intervention ultérieure des E_i.

La figure 7 peut être initiée à partir d'un parallélogramme bordé de carrés ou d'un polygone tel que ABCC'D'I'J'I. De là un pavage du plan. En le supposant illimité, il est invariant dans des rotations de k.90°, de centres tels que E ou H, dans des symétries centrales de centres tels que ω (ou E ou H), dans une infinité de translations.

Nous verrons au § 5.3 l'utilisation, pour découvrir ou démontrer, des invariances signalées.

Remarque : éliminer des « bruits parasites »
L'organisation de la figure 8 suggère un tel « bruit » : elle donne l'impression d'obtenir (2) puis (3) à partir de (1) par une rotation.
Ce qui est faux. Un contrôle avec un calque en convaincra : les bonshommes n'ont pas tourné ! Et on passe, par exemple, de (1) à (2) ou à (3) par des translations…



4. 3 **Isométries et dénombrement des solutions d'un problème de construction**
Quand il s'agit de construire une figure sans lui imposer une position, des « solutions » superposables ne comptent que pour une. Il en va ainsi, par exemple, pour la construction d'un triangle connaissant les longueurs des trois côtés : la construction classique donne deux triangles symétriques, donc **une** solution.

5. UTILISER DES ISOMÉTRIES POUR CRÉER, POUR DÉCOUVRIR, JUSTIFIER, CONSTRUIRE

5. 1 **Pour créer**
* Il en est ainsi pour la réalisation de frises, pavages, papiers peints, rosaces,…
* On peut, notamment, déformer une figure pavante simple à l'aide de translations et de symétries, de « morceaux » de la figure reportés « ailleurs » de façon adéquate pour obtenir une figure qui soit encore pavante (en l'expliquant) (cf. dessins d'Escher et des brochures APMEP : « Activités mathématiques en 4ème-3ème, tome 2 », « Aides pédagogiques : Géométrie au CM »).

Exemple : à partir d'un parallélogramme et d'un réseau de parallélogrammes décalés .

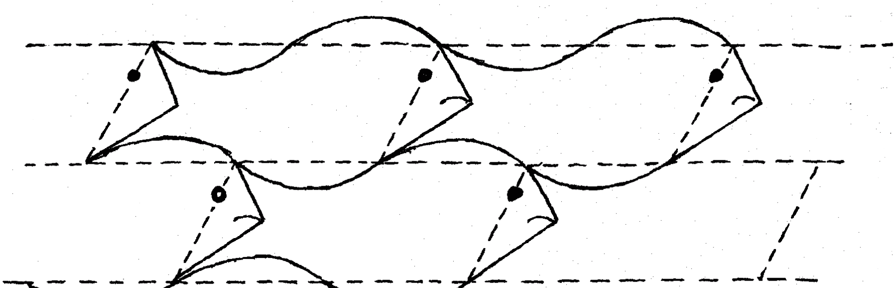


figure 9

5. 2 **Pour découvrir**

Exemple 1 : Recherche de M, sur Δ, (cf figure 10) tel que le trajet MA + MB soit minimal, en invitant à le comparer à MA' + MB.

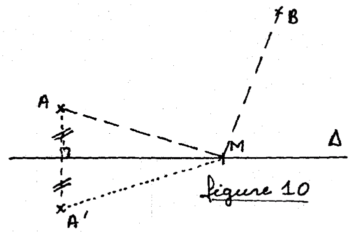


figure 10

Exemple 2 : Cf. figure 11 où le point A et le carré LOUP sont fixes. B et C varient en position avec, toujours, AB = AC, $\widehat{A}$ = 45°, l'arc $\overset{\frown}{BC}$ joignant B à C dans le sens de la flèche. Soit à chercher sur quelle ligne fixe se déplace C lorsque B se déplace sur le contour du carré LOUP.

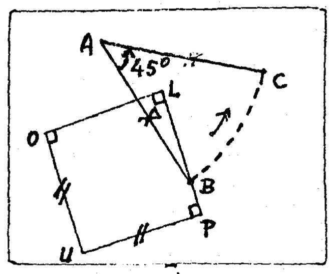


figure 11

Il s'agit ici :

- de reconnaître le passage de B à C grâce à une rotation, induite par la **figure-clé triangle isocèle** et l'invariance, sens compris, de $\widehat{A}$. En cette étape 1, cette rotation est à suggérer,
- d'utiliser ensuite « **la propriété fondamentale n°2** » (cf. § 1.2)

5. 3 **Pour justifier**

Exemple 1 (cf. figure 4). Les points A, K, M, E semblent alignés. Pour le prouver, il suffit de constater l'auto-symétrie de la figure par rapport à (AM) et de l'exploiter pour E et pour les droites CG et BF symétriques l'une de l'autre.
En cette étape 1, il y a lieu de faire d'abord :

- apparaître l'axe de symétrie du triangle isocèle ABC, médiatrice de [BC],
- percevoir la préservation de cette symétrie par les tracés des triangles rectangles isocèles.

Exemple 2 (cf. figure 5). Le quadrilatère EIFJ semble être un parallélogramme. En cette étape 1, pour le prouver, il y a lieu de faire d'abord :

- apparaître le centre de symétrie du parallélogramme ABCD,
- percevoir la préservation de cette symétrie par les tracés ultérieurs.

Exemple 3 (cf. figure 6). Le quadrilatère $E_1E_2E_3E_4$ semble être un carré. En cette étape 1, pour le prouver, il y a lieu de faire d'abord :

- apparaître l'invariance du carré initial dans une rotation de centre O et d'angle 90° (de sens indifférent),
- percevoir la préservation de cette invariance par les tracés des E_i.