Exercices de-ci, de-là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigué. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par Mél à :
bruno.alaplantive@free.fr
ou par courrier à :
Jean Fromentin, 17 rue de la Roussille, 79000 NIORT

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique en joignant, si vous le pouvez, une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Errata de l'énoncé de l'exercice 484-3

L'équation correcte est $3x^2 - 8y^2 + 3x^2y^2 = 2008$ et non pas $3x^2 + 8y^2 + 3x^2y^2 = 2008$.

Avec toutes mes excuses pour cette faute de frappe. Cette erreur avait été repérée trop tardivement pour être rectifiée avant la publication du BV. Elle a été signalée sur le site de l'APMEP dès la parution du no 484.

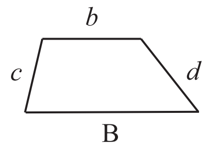
Pour me faire pardonner, je vous livre la récréation suivante que certainement beaucoup d'entre vous connaissent déjà, mais que j'ai découverte, pour ma part, il y a peu : C'est un résultat connu que la somme des n premiers entiers impairs, depuis 1, est égale à n^2. Qu'en est-il pour la somme des n premiers entiers impairs, depuis $n(n-1)+1$?

Exercices

Exercice 485-1 : Formule de grimoire ?

Dans le trapèze ci-contre, B, b, c et d désignent les longueurs des côtés. On note p son demi-périmètre et S son aire. Montrer que

$$S = \frac{B+b}{B-b}\sqrt{(p-B)(p-b)(p-b-c)(p-b-d)}$$



Exercice 485-2 (Georges Lion – Wallis)

Soit ABC un triangle d'aire S. Démontrer la relation : $AB^2 + AC^2 + BC^2 \geq 4S\sqrt{3}$.

Exercice 485-3 : Arithmétique

Démontrer le résultat suivant : Tout nombre entier qui est une puissance d'une somme de deux carrés est lui-même une somme de deux carrés.

Exercice 485-4 (Jean Théocliste – Valence)

Brevet supérieur Grenoble 1937

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n}.$$

Écrire S_n sous forme condensée. En déduire :

a) $S_n < 2$.

b) la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Solutions

Exercice 480-4 (Georges Lion – Wallis)

Soient deux groupes finis G et G′ et φ une bijection de G sur G′, tels que, pour tout $x \in$ G, alors $\varphi(x)$ soit de même ordre que x.

Se peut-il que φ ne soit pas un isomorphisme ?

Solution de Georges Lion (Wallis)

La réponse est affirmative comme le montre l'exemple suivant.

1. Soit G le produit direct de trois copies du groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. G est commutatif, d'ordre 27 et tout élément non neutre y est d'ordre 3.
2. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ peut aussi être muni d'une structure de corps qu'on note $\mathbb{F}_3$.

   Soit G′ l'ensemble des matrices triangulaires

   $$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{a,b,c}$$

   où a, b, c sont des éléments de $\mathbb{F}_3$.

   Par des calculs simples, on démontre que la multiplication des matrices fait de G′ un groupe non commutatif dans lequel tout élément non neutre est d'ordre 3. Par ailleurs G′ est d'ordre 27.

   L'application φ définie par $(a,b,c) \mapsto M_{a,b,c}$ est une bijection de G sur G′. Si φ était un isomorphisme, G′ qui est égal à φ(G) serait lui aussi commutatif, ce qui n'a pas lieu.

Georges Lion dit ne pas avoir trouvé de groupes plus petits que G *et* G′, *mais n'exclut pas une telle possibilité parmi les nombreux groupes d'ordre* 16 *ou d'ordre* 24. *Avis aux amateurs !*

Exercice 482-1 (Le Facteur X, n° 68 de février 1961)

Avec 6 Nouveaux Francs exactement, Yves a acheté des cartes A à 45 francs, des cartes B à 40 francs et des cartes C à 30 francs. Le nombre des cartes A est supérieur à celui des cartes B et à celui des cartes C.
Combien Yves a-t-il acheté de cartes de chaque sorte ?
N.B – Il faut compter, au moins, deux cartes B et deux cartes C.
(rappel pour les moins de cinquante ans : 1 Nouveau Franc = 100 francs)

Solution de Jean-Yves Le Cadre (Saint Avé)

Contrairement à la présentation de l'exercice, j'utiliserai la méthode arithmétique multi-millénaire dite de la « fausse position[1] ».
Tout d'abord, en prenant 5 francs comme unité monétaire u, les données deviennent respectivement 120, 9, 8, 6 et il est immédiat que :

- le nombre de cartes B est multiple de 3
- le nombre de cartes A est pair.

La plus petite valeur des cartes B et C vaut donc $3 \times 8 + 2 \times 6 = 36$ et il reste 84 u pour les cartes A. Le plus grand multiple pair de 9 compatible est alors 8×9. Il nous reste encore 12 u. Pour que « ça tombe juste », une seule possibilité : prendre 2 cartes C de plus, ce qui donne une solution : acheter 8 cartes A, 3 cartes B et 4 cartes C.
Mais est-ce la seule ?
Reprenons la solution minimale (3 et 2) pour B et C, et la plus grande, autre que 8 pour A, i.e. 6.
Le total donne $6 \times 9 + 3 \times 8 + 2 \times 6 = 90$ u. Il reste 30 u à répartir sur B et C. Sur C seulement, c'est impossible. On est contraint d'augmenter le nombre de cartes B, soit 6 au minimum. Or $6 \times 9 + 6 \times 8 + 2 \times 6 = 114$ u. Il reste 6 u.
Seule possibilité : acheter une carte C de plus, ce qui conduit à acheter 6 cartes A, 6 cartes B et 3 cartes C.
Selon que l'inégalité est stricte ou large, on a la première solution ou les deux.

Autres solutions : Frédéric de Ligt (Montguyon), Georges Lion (Wallis), … ? … (Acoua, Mayotte).

(ces autres solutions, plus conventionnelles, relèvent d'arithmétique du type de la spécialité de terminale S)

Nota. Si la solution, ici proposée, constitue un joli pied de nez au modernisme (les anciens ne nous ont certainement pas attendu pour résoudre ce genre de problème !), il n'en demeure pas moins que les outils modernes, avec la possibilité de mouvement qu'ils apportent et leur précision, permettent une approche graphique. Constitue-t-elle une démonstration …?

(1) Jean-Yves Le Cadre fait référence au livre *Histoire d'algorithmes* (Belin) qui renvoie un problème comparable en page 98.

Vous trouverez sur le site un fichier Géogébra illustrant cette possibilité (rubrique Publications » Le Bulletin Vert » Les sommaires » Sommaire du Bulletin nº 485).

Exercice 482-2 (Georges Lion – Wallis)

- Soit x, y et z, trois entiers premiers > 3. Montrer que $x^2 + y^2 + z^2$ n'est pas premier.
- Soit m et n deux entiers. Montrer que si $m^4 + 4n^4$ est distinct de 5 alors ce nombre n'est pas premier (résultat dû à Sophie Germain).

Solution de Odile Simon (La Prénessaye)

1. Soient x, y, z trois nombres entiers premiers supérieurs à 3.
Donc ils ne sont pas multiples de 3 et peuvent s'écrire : $x = 3m \pm 1$, $y = 3n \pm 1$, $z = 3p \pm 1$ où m, n, p sont des entiers.
Alors :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 + 9n^2 \pm 6n + 1 + 9p^2 \pm 6p + 1,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3\left(3m^2 \pm 2m + 3n^2 \pm 2n + 3p^2 \pm 2p + 1\right).$$

Les trois nombres étant supérieurs à 3, la somme des carrés est supérieure à 27, donc le facteur $3m^2 \pm 2m + 3n^2 \pm 2n + 3p^2 \pm 2p + 1$ est différent de 1 et le nombre $x^2 + y^2 + z^2$ n'est pas premier.

2. Soient m et n deux entiers naturels, tels que $m^4 + 4n^4$ soit distinct de 5.
On a l'égalité $m^4 + 4n^4 = 5$ si et seulement si $m = 1$ et $n = 1$. Rappelons qu'un nombre premier est un entier naturel strictement supérieur à 1 qui n'admet pour facteurs que 1 et lui-même.
Selon le niveau auquel on pose le problème, on peut l'aborder de trois façons :
– une démonstration utilisant les nombres complexes,
– une démonstration utilisant les identités remarquables,
– une recherche, par tâtonnement, de facteurs simples.

A – Une méthode utilisant les nombres complexes

Comme l'expression $m^4 + 4n^4$ est homogène en m et n, pour la factoriser dans $\mathbb{N}$, il suffit de factoriser le polynôme $X^4 + 4$ dans $\mathbb{Z}[X]$. Pour obtenir cette factorisation, on factorise d'abord dans $\mathbb{C}[X]$, ce qui revient à chercher les racines dans $\mathbb{C}$ de $X^4 + 4 = 0$.
Le nombre -4 a une infinité d'écritures dans $\mathbb{C}$: $-4 = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+2k\pi)}$ pour tout k entier.

On obtient les différentes racines quatrièmes de -4 qui sont : $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+2k\pi)/4}$ pour $k = 0,1,2,3$. Ainsi $X^4 + 4$ se factorise, dans $\mathbb{C}[X]$ en :

$$X^4 + 4 = \left(X - \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\right)\left(X - \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/4+\pi/2)}\right)\left(X - \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/4+\pi)}\right)\left(X - \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/4+3\pi/2)}\right).$$

On obtient la factorisation du nombre entier dans $\mathbb{C}$:

$$m^4 + 4n^4 = \big(m-(1+i)n\big)\big(m-(-1+i)n\big)\big(m-(-1-i)n\big)\big(m-(1-i)n\big).$$

En effectuant le produit des nombres conjugués deux à deux, on a

$$m^4 + 4n^4 = \big((m+n)^2+n^2\big)\big((m-n)^2+n^2\big),$$

ce qui est une factorisation dans $\mathbb{N}$. Pour montrer que ce nombre n'est pas premier, il reste à vérifier que si l'un de ces facteurs est égal à 1, alors l'autre n'est pas premier.

Chacun des facteurs est une somme de deux carrés dans $\mathbb{N}$, donc ne peut être égal à 1 que si l'un des carrés est nul et l'autre égal à 1:

– on a $(m+n)^2 + n^2 = 1$ si et seulement si $m = 1$ et $n = 0$;
  dans ce cas, $m^4 + 4n^4 = 1$, ce n'est pas un nombre premier.
– on a $(m-n)^2 + n^2 = 1$ si et seulement si ($n = 1$ et $m = n = 1$) ou ($n = 0$ et $m = n + 1 = 1$) ;
  dans le premier cas on a, $m^4 + 4n^4 = 1$, ce n'est pas un nombre premier,
  dans le second cas, $m^4 + 4n^4 = 5$, ce qui est le nombre exclu.

B – Une démonstration utilisant les identités remarquables :

L'expression $m^4 + 4n^4$, somme de deux carrés, peut être considérée comme deux termes du développement du carré d'une somme ; en y ajoutant et retranchant le double produit, on peut écrire :

$$m^4 + 4n^4 = m^4 + 4n^4 + 4m^2n^2 - 4m^2n^2,$$

$$m^4 + 4n^4 = \left(m^2+2n^2\right)^2 - 4m^2n^2.$$

D'où, l'expression est une différence de deux carrés que l'on peut factoriser :

$$m^4 + 4n^4 = \left(m^2+2n^2+2mn\right)\left(m^2+2n^2-2mn\right).$$

On obtient la même factorisation qu'en utilisant les nombres complexes, d'où la conclusion.

C – Une méthode de recherche arithmétique par tâtonnement

On a cinq possibilités pour écrire chacun des nombres en fonctions des multiples de 5 :

$m = 5p$, $m = 5p \pm 1$, $m = 5p \pm 2$ et $n = 5q$, $n = 5q \pm 1$, $n = 5q \pm 2$, où p et q sont des entiers.

Comme m et n ne jouent pas un rôle symétrique on a 25 possibilités pour écrire les couples (m,n).

On va remarquer que plusieurs s'étudient simultanément.

a) Si m et n sont multiples de 5, alors $m^4 + 4n^4 = 625\,(p^4 + 4q^4)$ n'est pas premier.

b) On a les formules du binôme :

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$
$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4,$$

D'où:

$$(5p \pm 1)^4 = 625\,p^4 \pm 4 \times 125\,p^3 + 6 \times 25\,p^2 \pm 4 \times 5\,p + 1,$$
$$(5p \pm 2)^4 = 625\,p^4 \pm 8 \times 125\,p^3 + 24 \times 25\,p^2 \pm 32 \times 5\,p + 16.$$

On a $(5p \pm 1)^4 = 1$ module 5 et $(5p \pm 2)^4 = 1$ module 5.

On peut déjà distinguer quatre cas :
1) $m = 5p \pm 1$ et $n = 5q \pm 1$;
2) $m = 5p \pm 1$ et $n = 5q \pm 2$;
3) $m = 5p \pm 2$ et $n = 5q \pm 1$;
4) $m = 5p \pm 2$ et $n = 5q \pm 2$.
Dans chacun de ces cas, $m^4 + 4\,n^4 = 1 + 4 = 0$ module 5, donc $m^4 + 4\,n^4$ est multiple de 5.

c) Si m est multiple de 10 alors $m^4 + 4\,n^4$ est multiple de 2.

d) Reste à traiter le cas où l'un est multiple de 5 et pas l'autre, dans ce cas, $m^4 + 4\,n^4$ ne peut pas l'être. En examinant les premiers termes concernés, on peut constater, sur le tableau ci-dessous, qu'ils ne sont pas premiers mais sans trouver un point commun à leur factorisation : cette méthode aura du mal à conclure.

n	1	2	3	4	6	7	8	9
n^4	1	16	81	256	1 296	2 401	4 096	6 561
$4\,n^4$	4	64	324	1 024	5 184	9 604	16 384	26 244
$5^4 + 4\,n^4$	629 = 17×37	689 = 13×53	949 = 13×73	1 649 = 17×97	5 809	10 229	17 009	26 869
$15^4 + 4\,n^4$	50 629	50 689	50 949	51 649	55 809	60 229	67 009	76 869

Odile Simon conclut que cet exercice montre la puissance d'une démonstration sans distinction de cas et que, de plus, il peut être traité à différents niveaux.

Autres solutions : Bernard Collignon (Coursan), Pierre Samuel (Bourg-La-Reine), Jean-Yves Coquan (Albi), Raymond Raynaud (Digne), Frédéric de Ligt (Montguyon), François Thirioux (Ugine), René Vittel (Lyon), Pierre Lapôtre (Calais), ...?... (Acoua, Mayotte).

Nota. Pierre Lapôtre fait remarquer que le logiciel Xcas permet de vérifier que pour le premier point, $x^2 + y^2 + z^2$ est bien divisible par 3.

Exercice 482-3 (Georges Lion – Wallis)

La régionale de Toulouse demandait la confection d'un puzzle, quatre sont à disposition. Devant la diversité des approches et les niveaux concernés, cet exercice fait l'objet d'un article spécifique (voir en page 836 du présent BV).

Exercice 482-4 (Jean Théocliste – Valence)

Calculer $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \tan x\right) dx$ et $\mathrm{J} = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x}\, dx$.

• **Calcul de I :**

Solution de René Vittel (Lyon)

$1+\tan x=\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x}$, donc $\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x+\sin x)\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)\,dx$.

Avec $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, nous obtenons

$$\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\sqrt{2}\right)dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)\,dx=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2-\mathrm{I}_3.$$

Posons $t=x-\dfrac{\pi}{4}$, nous obtenons $\mathrm{I}_2=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\ln(\cos t)\,dt$.

Comme la fonction $x\mapsto\ln(\cos x)$ est paire, $\mathrm{I}_2-\mathrm{I}_3=0$.

Finalement nos obtenons $\mathrm{I}=\mathrm{I}_1=\dfrac{\pi}{8}\ln 2$.

Autres solutions : Bernard Collignon (Coursan), Frédéric de Ligt (Montguyon), Pierre Lapôtre (Calais), Georges Lion (Wallis).

• **Calcul de J :**

Solution de Pierre Lapôtre (Calais)

$1+\sin x=1+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Alors $\mathrm{J}=\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)}\,dx$.

Or pour $x\in\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$, $\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\geq 0$;

tandis que pour $x\in\left[\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right]$, $\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\leq 0$.

On en déduit que $\mathrm{J}=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)dx-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)dx$.

Finalement nos obtenons $\mathrm{J}=4\sqrt{2}$.

Autres solutions : Bernard Collignon (Coursan), Frédéric de Ligt (Montguyon), Marie-Paule Bidot (.../...), Georges Lion (Wallis).

Nota. J'ai privilégié ici les présentations qui me semblent accessibles à des élèves de terminale ; mais de façon générale, les exercices de la rubrique de-ci de-là, demandent certainement d'être habillés pour être proposés à nos élèves. N'hésitez pas à me faire part de vos commentaires à ce sujet ou des exploitations que vous auriez faites en classe.