Hexagones magiques et … presque magiques

Michel Lafond(*)

I) Avant d'aborder le rôle des hexagones dans la joaillerie mathématique, disons un petit mot concernant une espèce de joyaux mathématiques très recherchés : les figures magiques.
Les FIGURES MAGIQUES sont constituées d'un certain nombre de cases disposées selon un motif « agréable à l'œil ». Ces cases présentent des alignements divers, et on cherche à remplir ces cases par des nombres (en principe des entiers consécutifs) de manière que tous les alignements aient la même somme.
Quelquefois, ce n'est pas aux cases, mais aux sommets des figures qu'on affecte des entiers. Aussi le terme « hexagone » souvent utilisé dans l'article aura diverses interprétations…

Bien sûr il y a de nombreuses variantes. Ainsi, on exige parfois que ce soient les produits qui soient constants. Parfois, la somme n'est pas égale partout…

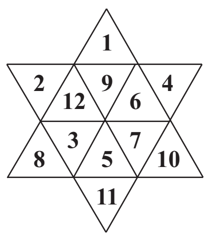
Voici des exemples variés :

4	**9**	**2**
3	**5**	**7**
8	**1**	**6**

L'incontournable.
Constante : 15

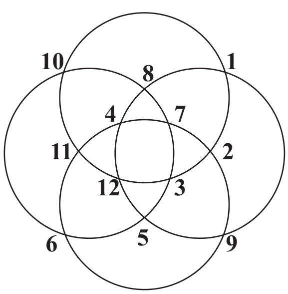
2	**9**	**4**	**12**	**13**
7	**10**	**14**	**1**	**8**
15	**5**	**6**	**11**	**3**

Un rectangle magique.
Les constantes valent
40 (lignes) et
24 (colonnes)



Un hexagone croisé magique
avec la constante 33
pour les 6 alignements
de 5 triangles

Curieusement, en modifiant la place des nombres dans l'hexagone précédent, on peut obtenir la constante 32 au lieu de 33 [exercice laissé au lecteur].



Un bel ensemble de cercles
avec la constante magique 39
sur la frontière de chacun d'eux.

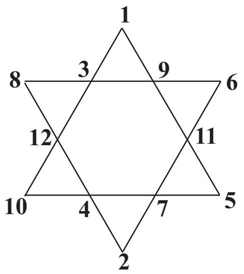
(*) mlafond001@yahoo.fr

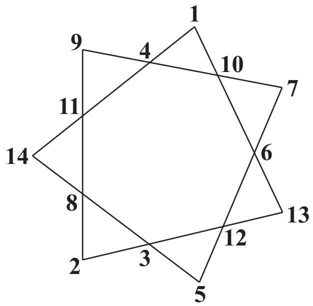
Un autre « incontournable » est le célèbre « Melancolia » du peintre-graveur Albrecht Dürer, qui date de 1514 et dont on peut trouver l'histoire sur

http://www.kandaki.com/CM-Durer.htm.

Il s'agit d'un carré magique d'ordre 4.

Et pour terminer ces exemples, voici ci-dessous :
À gauche : un hexagone magique (en fait deux triangles) avec la constante 26 pour les 6 alignements (à ne pas confondre avec l'hexagone croisé vu précédemment).
À droite : un heptagone magique avec la constante 30 pour les 7 alignements.





Par rapport à d'autres êtres mathématiques comme les fractales, les nombres premiers gigantesques ou certains pavages miraculeux, ces objets magiques sont en fait assez faciles à obtenir, et ce d'autant plus que leur taille (mesurée en nombre de cases à remplir) est grande !
En effet, le nombre de contraintes égal au nombre d'alignements croit beaucoup moins vite avec la taille que le nombre de libertés à savoir le nombre d'entiers mis dans les cases.
Avec l'exemple des carrés magiques, pour l'ordre n on a n^2 libertés pour seulement $2n + 2$ contraintes d'alignements (lignes colonnes et diagonales).
(Précisons qu'habituellement, en ce qui concerne les carrés magiques, les deux diagonales sont considérées dans les alignements).

La preuve en chiffres. Aux symétries et rotations près, si l'on utilise, comme c'est le cas habituellement pour le remplissage, les nombres entiers de 1 à n^2, alors :
On a un seul carré magique d'ordre 3 (le carré vu plus haut).
On a 880 carrés magiques d'ordre 4 (résultat connu depuis 3 siècles par Frénicle de Bessy).
On a 275 305 224 carrés magiques d'ordre 5 (résultat de 1973, merci l'informatique).
Et on estime à un peu moins de 2.10^{19} le nombre de carrés magiques d'ordre 6…

La démonstration de l'unicité du carré magique d'ordre 3 est facile :
La constante d'alignement vaut C = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) / 3 = 15.

a	*b*	*c*
d	*e*	*f*
g	*h*	*i*

Carré 1

1		*c*
	5	*f*
g	*h*	9

Carré 2

	1	
	5	
	9	

Carré 3

	1	
	5	
2	9	4

Carré 4

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Carré 5

Dans Carré 1 : $(a + e + i) + (c + e + g) + (b + e + h) + (d + e + f) = 4$ C.
Or $(a + b + c) + (d + e + f) + (g + h + i) = 3$ C. Donc par soustraction $3e$ = C d'où $e = 5$.
Par symétrie le 1 ne peut occuper que deux positions (Carré 2 ou Carré 3). Mais Carré 2 est impossible, car $c + f = g + h = 6$ ne peut être réalisé que par 2 + 4. On a donc nécessairement Carré 3, qui par symétrie donne l'unique Carré 4 qui se complète de manière unique par Carré 5.
Voir aussi le site de G. Villemin donné à la fin.

Alors, si on veut que le défi devienne intéressant, il faut ajouter des contraintes, et plus les contraintes seront fortes, plus la magie opérera.
Parmi les milliers de possibilités que les amateurs de monde entier ont imaginées depuis des siècles, beaucoup sont répertoriées sur les sites Internet (Tapez « carré magique » dans un moteur de recherche puis surfez)…

Citons la bimagie qui mérite le détour :

Dans un carré d'ordre n, on place les entiers de 1 à n^2 et on exige d'une part la même somme pour les nombres des lignes, colonnes et diagonales (magie ordinaire) et d'autre part la même somme pour les carrés de ces nombres.
Ce n'est plus de la magie, mais de la sorcellerie.
Le carré bimagique ci-contre est de Pfeffermann (1891), La constante est 260 pour les sommes et 11 180 pour les sommes de carrés.
Boyer et Trump ont prouvé en 2002 qu'il n'y avait pas de carré bimagique d'ordre inférieur à 8.

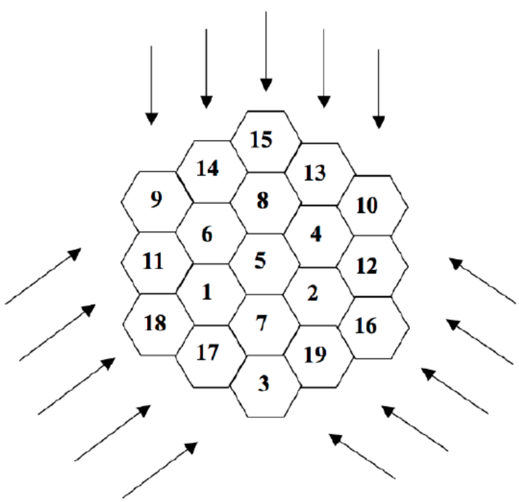
3	21	51	14	37	28	62	44
22	39	1	27	52	42	16	61
45	32	58	36	11	17	55	6
40	50	24	41	2	63	25	15
60	46	12	53	30	35	5	19
49	4	38	64	23	13	43	26
10	59	29	7	48	54	20	33
31	9	47	18	57	8	34	56

Un carré bimagique d'ordre 25 a été publié dans le Petit Vert (bulletin de la régionale Lorraine) nº 17 de mars 1989. Il est téléchargeable sur :
http://apmeplorraine.free.fr/index.php?module=etudes
La constante est 7 800 pour les sommes et 3 247 400 pour les sommes de carrés ! Il est construit selon un algorithme valable pour tout ordre $n = p^2$. On peut le trouver dans le livre de J. Bouteloup cité en bibliographie.

La magie, la bimagie, pourquoi pas la trimagie pendant qu'on y est ?
Et bien oui, c'est possible :
Wikipédia cite le seul carré trimagique connu d'ordre 12, donné ci-dessous, trouvé en juin 2002 par le mathématicien allemand Walter Trump. Ses constantes valent 870 pour les sommes simples, 83 810 pour les carrés et 9 082 800 pour les cubes.

$$\begin{bmatrix}
1 & 22 & 33 & 41 & 62 & 66 & 79 & 83 & 104 & 112 & 123 & 144 \\
9 & 119 & 45 & 115 & 107 & 93 & 52 & 38 & 30 & 100 & 26 & 136 \\
75 & 141 & 35 & 48 & 57 & 14 & 131 & 88 & 97 & 110 & 4 & 70 \\
74 & 8 & 106 & 49 & 12 & 43 & 102 & 133 & 96 & 39 & 137 & 71 \\
140 & 101 & 124 & 42 & 60 & 37 & 108 & 85 & 103 & 21 & 44 & 5 \\
122 & 76 & 142 & 86 & 67 & 126 & 19 & 78 & 59 & 3 & 69 & 23 \\
55 & 27 & 95 & 135 & 130 & 89 & 56 & 15 & 10 & 50 & 118 & 90 \\
132 & 117 & 68 & 91 & 11 & 99 & 46 & 134 & 54 & 77 & 28 & 13 \\
73 & 64 & 2 & 121 & 109 & 32 & 113 & 36 & 24 & 143 & 81 & 72 \\
58 & 98 & 84 & 116 & 138 & 16 & 129 & 7 & 29 & 61 & 47 & 87 \\
80 & 34 & 105 & 6 & 92 & 127 & 18 & 53 & 139 & 40 & 111 & 65 \\
51 & 63 & 31 & 20 & 25 & 128 & 17 & 120 & 125 & 114 & 82 & 94
\end{bmatrix}$$

II) Une autre manière de corser la situation est d'aller chercher des figures géométriques moins courantes ou de faire en sorte que les contraintes impliquent l'unicité de la solution (cerise sur le gâteau). On obtient alors des petits bijoux numériques (bijoux parce qu'ils sont beaux et rares).
C'est le cas de l'hexagone magique d'ordre 3 que nous admirons ci-dessous :
La somme constante des 15 alignements vaut 38.



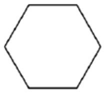
Il est très difficile à obtenir. Ce problème fut proposé en 1895 par William Radcliffe (habitant l'île de Man). Clifford Adams (employé des chemins de fer) prend connaissance du problème en 1910, travaille très longtemps dessus et en 1957 trouve une solution qu'il envoie (5 ans plus tard !) à Martin Gardner, spécialiste des jeux mathématiques. M. Gardner l'envoie au mathématicien Charles W. Trigg, expert en combinatoire, lequel démontre l'unicité de la solution aux symétries et rotations près.

III) À la vue du bijou précédent, la question qui vient immédiatement à l'esprit est :

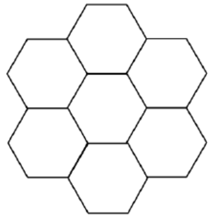
Y a t-il d'autres hexagones magiques ? (Sous-entendu d'ordre autre que 3)

Hexagones magiques … et presque magiques

Notons H_n l'hexagone d'ordre n, c'est-à-dire le grand hexagone composé d'un pavage de petits hexagones égaux à raison de n pavés par côté.



H_1



H_2

<u>Supposons que H_n soit rempli magiquement</u>, et examinons les conséquences.

• D'abord, combien H_n a t-il de cases ?

La réponse est :

$$n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(2n-2)+(2n-1)+(2n-2)+\ldots+(n+2)+((n+1)+n$$
$$=2\left[n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(2n-2)\right]+(2n-1)$$
$$=(n-1)(3n-2)+(2n-1)=3n^2-3n+1$$

• Quelle serait la constante des sommes de H_n ?

On remplit H_n avec les entiers de 1 à $3n^2 - 3n + 1$.

La somme de tous ces entiers est $S_n = \dfrac{(3n^2-3n+1)(3n^2-3n+2)}{2}$.

Cette somme doit se partager entre les $2n - 1$ alignements d'une des trois directions, d'où la constante

$$C_n = \frac{S_n}{2n-1} = \frac{(3n^2-3n+1)(3n^2-3n+2)}{2(2n-1)} = \frac{9n^4-18n^3+18n^2-9n+2}{2(2n-1)}.$$

C_n doit être un entier, ce qui nécessite que $2n - 1$ divise

$$9n^4 - 18n^3 + 18n^2 - 9n + 2 = N.$$

Or $(2n - 1)^4 = 16n^4 - 32n^3 + 24n^2 - 8n + 1$.

$2n - 1$ divise N donc 16 N ainsi que $(2n - 1)^4$ donc $9(2n - 1)^4$.

Une condition nécessaire à la magie de H_n est donc que $2n - 1$ divise

$$16\,N - 9(2n - 1)^4 = 72\,n^2 - 72n + 23.$$

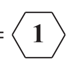
Mais $2n - 1$ divise $18(2n - 1)^2 = 72\,n^2 - 72n + 18$.

Il faut donc que $2n - 1$ divise $72\,n^2 - 72n + 23 - [72\,n^2 - 72n + 18] = 5$.

Cela ne laisse que deux possibilités : $2n - 1 = 1$ ou $2n - 1 = 5$ c'est à dire $n = 1$ ou $n = 3$.

Ces deux conditions nécessaires sont aussi suffisantes, donc :

Il n'y a que deux hexagones magiques : H_3 vu au paragraphe précédent et le bijou de pacotille ci-contre :

$H_1 =$ 

IV) Ce serait dommage d'abandonner si vite les hexagones.

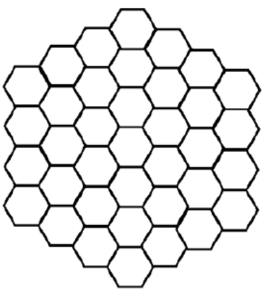
Le cas $n = 3$ étant résolu, on va étudier les deux cas suivants $n = 4$ et $n = 5$.

- Le cas de l'hexagone H_4.

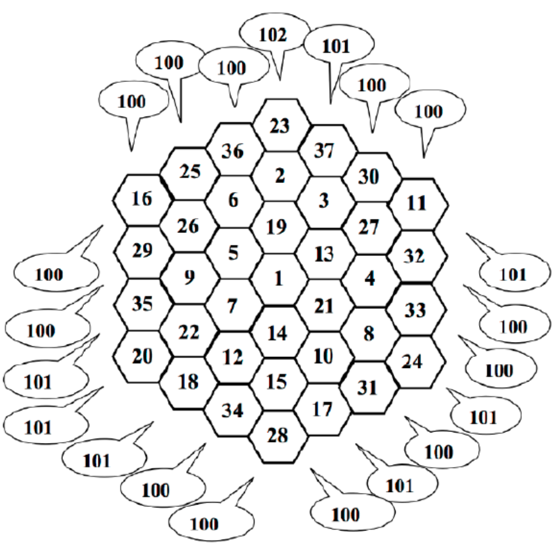
En utilisant l'expression de C_n du paragraphe III, on a $C_4 = \dfrac{1406}{14} = 100{,}428\ldots$ non entier.

On savait que le bijou magique H_4 n'était qu'un rêve, aussi on peut s'en approcher en exigeant que les 21 alignements de H_4 aient tous une somme la plus proche possible de 100,428… Ce serait bien si les 21 sommes étaient toutes supérieures ou égales à 100, d'où le problème suivant qu'on peut résoudre à la main en quelques heures :

Placer dans les 37 cases de l'hexagone H_4 ci-dessous les entiers de 1 à 37 de manière que les 21 alignements aient tous une somme supérieure ou égale à 100.



Voici une solution qu'on aimerait bien améliorer en supprimant l'alignement de 102, défaut inadmissible chez un bijou de cette taille :



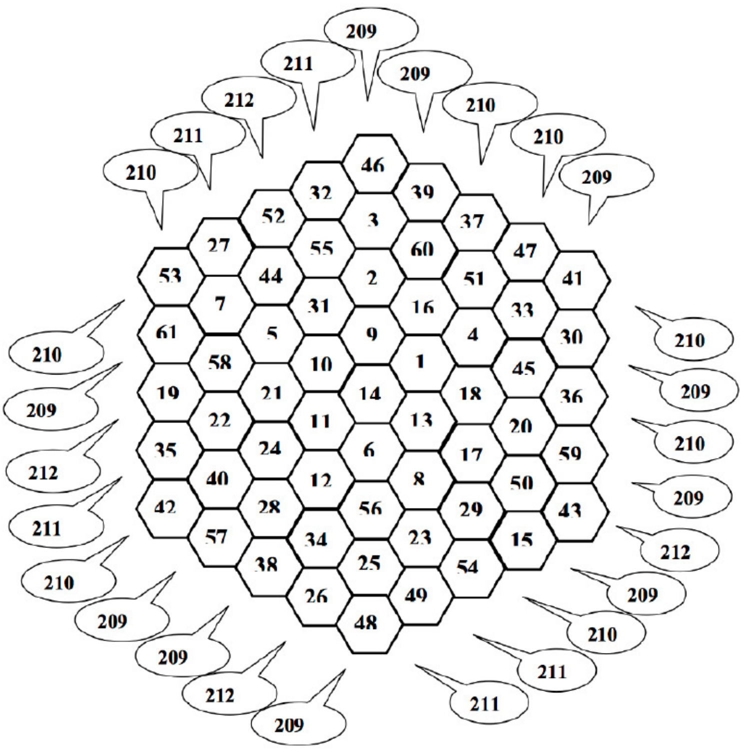
• Le cas de l'hexagone H_5.

H_5 a 61 cases et la somme des entiers de 1 à 61 vaut 1891.

Le calcul de la constante est alors facile : $C_5 = \dfrac{1891}{9} = 210{,}111\ldots$

On le savait, la magie de H_5 est impossible. Aussi on peut s'en approcher en exigeant que les 27 alignements de H_5 aient tous une somme supérieure ou égale à 210.
Si c'était possible, dans chacune des trois directions, ces sommes seraient à l'ordre près 210, 210, 210, 210, 210, 210, 210, 210 et 211, seule manière d'obtenir une somme de 1891 en 9 termes entiers tous supérieurs ou égaux à 210.

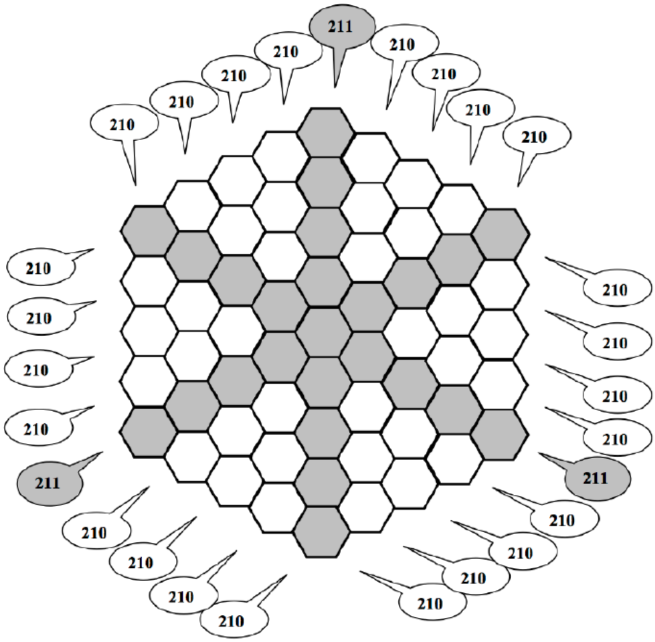
Je ne suis pas sûr qu'un tel joyau existe. À l'aide d'un programme informatique, j'ai obtenu un minimum de 209 dans chacun des 27 alignements avec l'hexagone ci-dessous :



Bien sûr, on aimerait obtenir le joyau suprême dans lequel les sommes seraient toutes égales à 210, sauf celles des alignements les plus longs qui vaudraient 211 (Figure page suivante).

Un lecteur patient y parviendra t-il ?

Est-il possible de placer les entiers de 1 à 61 dans les cases de l'hexagone ci-dessous de manière à réaliser les sommes imposées dans les 27 alignements ?



Bibliographie :

– *Jeux mathématiques du « Scientific American »*, Martin Gardner chez CEDIC Paris 1979.

– *Carrés Magiques. Carrés Latins et Eulériens. Histoire, théorie, pratique*. de Jacques Bouteloup aux Éditions du Choix.

Sitographie :

– Le site incontournable http://mathworld.wolfram.com/ véritable encyclopédie de maths.
(Dans la page d'accueil cliquer sur « Recreational Mathematics » puis sur « Magic Figures »)

– Le site http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/CarreMag/CMDebut.htm

– Wikipédia…

Note : Cet article a déjà été publié dans La feuille de vigne, bulletin de l'IREM de Dijon, n° 112 de juin 2009.