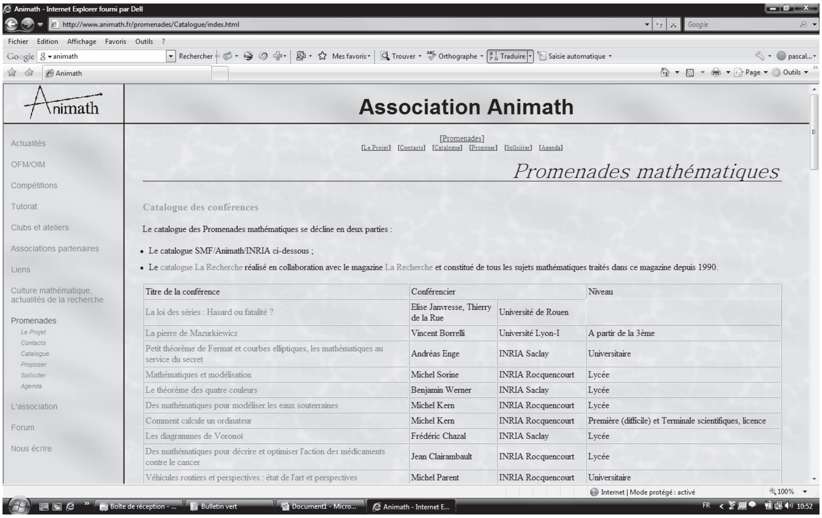
Une promenade mathématique ou Dieu a-t-il joué aux dés avec les nombres premiers ?

Pascale Pombourcq(*)

Sur le site d'Animath, figure une rubrique intitulée « Promenades mathématiques ». Il s'agit d'une liste de conférenciers qui acceptent d'intervenir dans des classes, au collège, au lycée ou à l'université.
Au lycée Bourdelle de Montauban, gros lycée technologique, nous avons décidé de



tenter l'expérience avec nos quatre classes de terminale S, soit plus d'une centaine d'élèves.

Une promenade coûte 150 €. Nous l'avons payée avec les crédits mathématiques.

Pour travailler sur l'orientation nous avions déjà expérimenté la venue d'ingénieurs, qui nous avaient présenté leur métier, mais jamais de conférenciers disciplinaires. Nous souhaitions présenter à des élèves de S des mathématiques dans un autre contexte que celui du cours et de la classe.

Nous avons la possibilité d'être hébergés à côté du lycée dans un amphi d'une annexe de l'IUFM. Comme vous l'avez vu dans le tableau ci-dessus, les conférenciers indiquent leurs préférences géographiques d'intervention. Sur le sud-ouest, peu de conférenciers se sont portés volontaires. Les propositions sont beaucoup plus nombreuses sur la région parisienne.

(*) pascale.pombourcq@gmail.com

Notre choix s'est porté sur Marc Peigné, professeur à l'Université François Rabelais de Tours. Le titre de sa conférence « Dieu a-t-il joué aux dés avec les nombres premiers ? » nous a semblé suffisamment accrocheur pour nos élèves. Nous souhaitions tenter notre première expérience de ce type avec une conférence sur un thème que tous les élèves connaissaient, à savoir les nombres premiers, les spécialités math ayant un petit avantage, ce qui n'était pas pour nous déplaire.

Dieu a-t-il joué aux dés avec les nombres premiers ?

Depuis des siècles les nombres premiers fascinent les mathématiciens. Depuis le théorème d'Euclide qui stipule qu'il existe une infinité de nombres premiers, de nombreux résultats ont permis d'affiner les renseignements dont on dispose quant à leur « répartition » parmi tous les nombres entiers. Nous démontrerons ce résultat fort simple et énoncerons alors la conjecture des nombres premiers jumeaux. Nous évoquerons aussi le **Théorème des nombres premiers** qui précise combien il existe d'entiers premiers plus petits que N, lorsque N est grand.

Ce que l'on connaît moins, c'est qu'il existe une grande analogie entre la répartition des nombres premiers et celle de nombres choisis au hasard et que toute une série de résultats concernant les nombres premiers ont leur pendant en théorie des probabilités. Nous illustrerons ceci par des exemples et laisserons alors les élèves répondre à la question du titre.

Cette promenade est destinée aux élèves de Première et terminale scientifique, nous préciserons au cours de l'exposé les notions nécessaires sur les nombres premiers et en calcul des probabilités.

Malheureusement en terminale S, nous manquons de temps. D'autant plus que s'était rajoutée l'an dernier l'épreuve de travaux pratiques. Nous n'avons donc pas pu préparer la conférence comme nous l'aurions souhaité et cela s'est limité à inciter les élèves à aller voir sur internet ce qu'ils trouvaient sur les nombres premiers.

Des affiches fournies par Animath ont été accrochées dans les salles de cours à l'étage des mathématiques. L'intervention s'est déroulée le mardi 6 mai après midi sur les heures de cours, et a duré un peu plus de deux heures, réparties en deux temps : exposé de Marc Peigné puis questions des élèves. Les questions des élèves ont malheureusement été trop rares. Mais c'était malgré tout une occasion pour les élèves d'avoir une activité différente, dans un cadre différent (amphi), une ouverture sur la culture mathématique. Il valait mieux être en fin de terminale S pour suivre (intégrales, suites, puissance x, complexes, ln et signe sigma).

Je ne vais pas reprendre ici la conférence en détail mais uniquement les grandes lignes. Il est difficile et relativement ingrat de retranscrire une conférence surtout quand celle-ci est destinée à des lycéens. Marc Peigné avait fait le choix d'un diaporama assez dépouillé, mais les commentaires qui l'accompagnaient étaient nombreux et vivants. Il l'avait émaillé de portraits ou photographies de mathématiciens, Riemann, Hardy, Ramanujan, Erdös et Tao, avec, pour chacun des mathématiciens, quelques anecdotes.

La conférence s'est déroulée en quatre parties :

1. Le théorème des nombres premiers.
2. Le calcul des probabilités au secours de la théorie des nombres.
3. Le théorème de Erdös et Kacs : quand la gaussienne réapparaît !
4. Sur la combinatoire des nombres l'ordre est présent partout !

Les élèves ont pour la plupart malheureusement décroché au début de la deuxième partie. Ceci explique en partie le manque de questions à la fin de la conférence.

I. Le théorème des nombres premiers

On dit parfois que les nombres premiers sont les briques qui servent à construire les nombres entiers et qu'ils sont pour le mathématicien ce qu'est pour le chimiste le tableau périodique des éléments de Mendeleïev. Combien sont-ils et reviennent-ils régulièrement ? Il existe une infinité de nombres premiers mais existe-t-il par exemple une infinité de nombres premiers jumeaux (nombres premiers qui ne diffèrent que de 2 ; 3 et 5 sont des nombres premiers jumeaux, 11 et 13 aussi) ? On peut représenter un « peigne » des nombres premiers. On voit apparaître alors des trous arbitrairement grands entre deux nombres premiers consécutifs, leur répartition est donc très erratique. Et pourtant les nombres premiers reviennent assez souvent : pour tout entier N, il existe toujours un nombre premier entre N et 2N. Il y a plus de nombres premiers entre 1 et N que de carrés.

Pour étudier la répartition des nombres premiers parmi tous les entiers, on s'intéresse au nombre $\pi(n)$ de nombres premiers plus petits que n. Gauss fut le premier à s'intéresser au comportement asymptotique de la fonction π. Il calcula les nombres premiers jusqu'à 3 000 000. L'outil informatique a permis de repousser très loin les limites de calcul.

n	$\pi(n)$
10	4
100	25
1 000	168
10 000	1 229
100 000	9 592
1 000 000	78 498
10 000 000	664 579
100 000 000	5 761 455
1 000 000 000	50 847 534
10 000 000 000	455 052 511

Gauss proposa dans un premier temps l'estimation suivante : $\pi(n) \sim \dfrac{n}{\ln(n)}$ qu'il affina un peu plus tard en la formule

$$\pi(n) \sim \int_2^n \frac{dt}{\ln t}$$

que l'on appelle le logarithme intégral de n, et dont un autre équivalent a été donné à la même époque par Legendre sous la forme $\dfrac{n}{\ln(n)-\mathrm{A}}$ où A est une constant égale environ à 1,083 66.

De nombreux mathématiciens s'employèrent à démontrer que l'estimation de Gauss était valide. Il a pourtant fallu attendre 1896 pour obtenir une démonstration de la formule ci-dessus.

II. Le calcul des probabilités au secours de la théorie des nombres

Jetons à présent une pièce un grand nombre de fois, on a une chance sur deux de tomber sur pile et une chance sur deux de tomber sur face. On obtient par exemple la suite aléatoire

P P F F F F P P F F F F F P …

ce qui permet d'écrire les entiers de deux façons distinctes :

1 **2** 3 4 5 6 **7** **8** 9 10 11 12 13 **14** …

puis de garder les seuls nombres gras

1 2 7 8 14 …

Le bon sens étayé par le calcul des probabilités nous dit que au bout de 100 jets, on aura environ 50 fois pile et donc environ 50 nombres gras parmi les entiers de 1 à 100 et plus généralement on aura N/2 nombres gras parmi les entiers 1, 2, …, N.

Supposons à présent que la probabilité d'obtenir pile évolue au fil du temps et devienne de plus en plus faible. Au premier jet, on obtient pile avec une probabilité 1/2, au second jet avec une probabilité 1/ln2, au troisième jet avec une probabilité 1/ln3, … L'ensemble aléatoire des entiers gras choisis par ce nouveau procédé est beaucoup plus « maigre » que le précédent. On montre que cet ensemble aléatoire biaisé contient environ N/ln(N) éléments.

III. Le théorème de Erdös et Kacs : quand la gaussienne réapparaît !

Dans le jeu de pile ou face, la fréquence des pile au bout de n lancers est proche de 1/2 quand n est grand : c'est la loi des grands nombres. Plus précisément la valeur des fréquences oscille autour de 1/2 avec des amplitudes plus ou moins grandes et plus ou moins probables, selon la loi célèbre appelée normale dont la densité a pour courbe représentative une courbe en cloche.

On s'intéresse maintenant au nombre d(n) de diviseurs premiers distincts d'un entier n quelconque, ce nombre oscille entre 1 et des valeurs arbitrairement grandes. De plus cette fonction d se comporte de façon très aléatoire, voici par exemple ses premières valeurs

0 1 1 1 1 2 1 1 1 2 1 2 1 2 2 1 1 2 1 2 2 2 1 2 1 2 1 2 1 3 1 1 2 2 …

L'approche probabiliste va permettre de dégager une certaine régularité dans cette suite.

Un entier n pris au hasard de façon équiprobable a une probabilité 1/p d'être divisible par le nombre premier p, puisqu'il a autant de chances d'être un multiple de p, que d'être congru à 1 modulo p, que d'être congru à 2 modulo p, …, que d'être congru à $p - 1$ modulo p.

Le nombre moyen de diviseurs premiers de n est donc égal à $\sum_{p \leq n} \frac{1}{p}$ soit environ $\ln \ln(n)$.

Lorsque n est grand, la quantité $\dfrac{d(n) - \ln \ln(n)}{\sqrt{\ln \ln(n)}}$ se comporte comme si elle suivait une loi normale.

IV. Sur la combinatoire des nombres : l'ordre est présent partout !

En 1890, le mathématicien français Henri Poincaré, faute de pouvoir prédire avec précision les trajectoires des planètes, démontra que, sous des hypothèses très générales et pour presque toutes les conditions initiales, un système dynamique revient au cours du temps aussi près que possible de son point de départ, et ce de façon répétée. C'est la naissance de la théorie du chaos.

Dans un tirage de pile ou face, toute suite fixée à l'avance apparaît presque sûrement et ce une infinité de fois. C'est le fameux paradoxe dit du singe savant énoncé par Émile Borel en 1909. Mais attention ! parier que le singe savant va écrire du premier coup et correctement la phrase « zéro est-il premier ? » est totalement suicidaire : on a moins d'une chance de gagner sur 26^{20}.

Revenons maintenant aux entiers et choisissons par exemple en jouant à pile ou face un sous-ensemble A de $\mathbb{N}$. On dit que A possède une progression arithmétique de longueur k, PAL(k), s'il contient une séquence de k entiers également espacés.

Si A est l'ensemble des nombres : 2 4 5 6 9 10 12 15 16 20,

PAL(3) : 2 4 6, 2 9 16, 4 5 6, 4 10 16, 4 12 20, 5 10 15, 6 9 12, 9 12 15, 10 15 20.

PAL(4) : 5 10 15 20 , 6 9 12 15.

En 1975, Szeméredi montra que dès que A n'est pas trop « maigre », il contient des progressions arithmétiques de n'importe quelle longueur. Les nombres premiers sont maigres, mais les nombres pairs ne le sont pas. L'ensemble des nombres premiers est maigre et pourtant il est possible d'obtenir par exemple des progressions arithmétiques aussi grandes que l'on veut. C'est en 2004 que Ben Green et Terence Tao répondent par l'affirmative à une question de Erdös sur l'existence de suites arithmétiques arbitrairement longues et composées exclusivement de nombres premiers. À la fin de l'année 2007, la plus longue progression connue n'est que de longueur 24, la plus longue progression arithmétique de nombres premiers consécutifs a pour longueur 10 : c'est la suite

$$a,\ a + 210,\ a + 2 \times 210,\ \dots\ ,\ a + 9 \times 210,$$

où a est le nombre suivant à 93 chiffres
100 99697 24697 14247 63778 66555 87969 84032 95093 24689 19004 18036 03417 75890 43417 03348 88215 90672 29719 24689.

C'est une expérience que nous renouvellerons, mais en essayant cette fois-ci de ne pas nous laisser prendre par le temps, et de la préparer convenablement. Dans les regrets que je peux avoir, figure celui de ne pas avoir demandé au conférencier le diaporama qu'il comptait présenter. Nous aurions ainsi bénéficié de la trame de la conférence et nous aurions pu y préparer nos élèves, par des recherches ciblées sur internet, par exemple.

Les élèves ont peu posé de questions, mais en ont beaucoup parlé entre eux dans les jours qui ont suivi.